

# **Metamodelle mehrerer Genauigkeitsstufen zur Stabilitätsanalyse versteifter Schalen aus Faserverbundwerkstoffen**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Dipl.-Ing.-Inf. Sebastian Freund  
aus (Geburtsort): Wippra

eingereicht am: 13.12.2018

mündliche Prüfung am: 13.08.2019

Gutachter:

Prof. Dr. Michael Sinapius

Prof. Dr. Hermann G. Matthies

2020

# Kurzfassung

Metamodelle sind ein wichtiges Werkzeug zur schnellen Analyse vieler Ausprägungen eines Systems. Aufgrund der Vielzahl von Entwurfsparametern und Iterationen sind schnelle Verfahren wie Metamodelle im Flugzeugentwurf grundsätzlich sehr gut geeignet. Um den numerischen Erstellungsaufwand zu senken oder die Metamodellgüte zu erhöhen, können sog. Multilevel-Metamodelle durch die Kombination unterschiedlich genauer Analysemethoden verwendet werden. In der vorliegenden Arbeit werden Multilevel-Metamodelle für den Flugzeugstrukturentwurf untersucht und anhand von zwei Anwendungsfällen bewertet.

Zunächst werden die Methoden zur Strukturanalyse vorgestellt und ihre Eigenschaften für die Verwendung in Metamodellen diskutiert. Weiterhin werden Verfahren zur Erstellung und Bewertung von Versuchsplänen, Metamodellen und Multilevel-Metamodellen dargelegt und ihre Vor- und Nachteile qualitativ erörtert. Die Verifikation und Kalibrierung dieser Verfahren erfolgt anhand der Biegeverformung eines schubstarren und eines schubweichen Balkenmodells als einfaches mechanisches Beispiel.

Anhand der metamodellbasierten Untersuchung der Stabilitätsanalyse mehrachsig belasteter, versteifter Paneele wird das Potential von Multilevel-Metamodellen im industrierelevanten Anwendungsfall untersucht. Hierbei sind deutliche Verbesserungen der Modellgüte im Vergleich zu einfachen Metamodellen möglich. Über eine Approximation des Modellfehlers und Erstellungsaufwands werden die Grenzen einer sinnvollen Anwendung von Multilevel-Metamodellen abgeleitet. Zur Vereinfachung der zu approximierenden Beulfunktion werden die Stützpunkte mithilfe einer Klassifikation nach Eigenformen des Hautfeldbeulens selektiert. Damit ist für axial belastete Paneele eine deutliche Verbesserung der Metamodellgüte möglich.

Schlagwörter: Metamodell, Ersatzmodell, Multilevel-Metamodell, Flugzeugstrukturentwurf, Strukturmechanik, Finite Elemente Methode, Stabilität, Beulen, Nachbeulen

# Abstract

Metamodels are an important tool for the rapid analysis of systems with a large set of variants. Since aircraft design involves a large number of structural areas, load cases and iterations, fast methods such as metamodels are beneficial. To reduce the numerical creation effort or to improve the quality of the metamodel, multilevel metamodels can be created by combining analysis methods with different accuracy and cost. In the present work, multilevel metamodels for aircraft structural design are investigated, which is evaluated based on two use cases.

For this purpose, the methods for structural analysis are presented and their properties for the use in metamodels are discussed. Furthermore, procedures for the creation and assessment of design of experiments, metamodels and multilevel metamodels are described and their advantages and disadvantages are examined qualitatively. The verification and calibration of these methods will be using the bending deformation of a cantilever beam using the Bernoulli and Timoshenko beam theory as simple mechanical example.

The metamodel based investigation of the buckling analysis of multiaxially loaded, stiffened panels shows the potential of multilevel metamodels in an industry relevant context. Considerable improvements of the metamodel quality in comparison to one-level metamodels will be shown. An approximation of the model error and the cost required to create the metamodel are used to derive the limits of a meaningful application of multilevel metamodels. Also a comparison to literature based heuristics will be carried out. In order to simplify the buckling function, the sample points representing skin buckling are selected according to a classification based on the eigenmodes. This enables an improvement of the metamodel error for axially loaded panels.

**Keywords:** Metamodel, Surrogate Model, Multilevel-Metamodel, Aircraft Structural Design, Structural Mechanics, Finite Element Method, Stability, Buckling, Postbuckling

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xv</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>xviii</b>
Abkürzungen . . . . .	xviii
Indizes und Schreibweisen . . . . .	xix
Symbole . . . . .	xx
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Leichtbau mit Faserverbundwerkstoffen . . . . .	1
1.2. Motivation . . . . .	2
1.3. Zielsetzung und Hypothesen der Arbeit . . . . .	3
<b>2. Methodik zur Multilevel-Metamodellentwicklung</b>	<b>7</b>
2.1. Erstellungsprozess von Metamodellen . . . . .	7
2.2. Entwicklungsschema für Multilevel-Metamodelle . . . . .	9
2.3. Neuheitswert der Arbeit . . . . .	13
<b>3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW</b>	<b>16</b>
3.1. Betrachtete Struktur . . . . .	16
3.1.1. Strukturbeschreibung . . . . .	16
3.1.2. Referenzpaneel . . . . .	18
3.2. Materialmodellierung von Schichtverbunden . . . . .	20



3.3.	Stabilitätsanalyse eines Panels unter mehrachsiger Belastung . . . . .	23
3.3.1.	Literatur zur Stabilität von Paneelen unter mehrachsiger Belastung . .	23
3.3.2.	Phänomenologie von Stabilitätsproblemen . . . . .	24
3.3.3.	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	27
3.3.4.	Auslegungskriterien im Flugzeugentwurf . . . . .	29
3.4.	Lineare Stabilitätsanalyse mit grob diskretisiertem Modell . . . . .	30
3.4.1.	Möglichkeiten und Beschränkungen des Strukturaufbaus in BEOS . .	31
3.4.2.	Modellaufbau . . . . .	31
3.4.3.	Verwendete Randbedingungen . . . . .	32
3.4.4.	Lastaufbringung und Ermittlung der Beullast . . . . .	34
3.4.5.	Verifikation . . . . .	35
3.5.	Lineare Stabilitätsanalyse mit hochaufgelösten Modell . . . . .	38
3.5.1.	Zielstellung . . . . .	38
3.5.2.	Modellaufbau . . . . .	38
3.5.3.	Verwendete Randbedingungen . . . . .	39
3.5.4.	Ermittlung der Beullast . . . . .	39
3.5.5.	Verifikation . . . . .	41
3.6.	Vergleich des grob diskretisierten Modell und hochaufgelösten Modell . . . .	43
3.6.1.	Qualitativer Vergleich . . . . .	43
3.6.2.	Quantitativer Vergleich . . . . .	43
3.7.	Zusammenfassung und Bezug zur Metamodellbildung . . . . .	46
<b>4.</b>	<b>Methoden zur Metamodellerstellung</b>	<b>47</b>
4.1.	Stochastische und numerische Grundlagen . . . . .	47
4.2.	Versuchsplanerstellung . . . . .	49
4.2.1.	Erwünschte Eigenschaften von Versuchsplänen . . . . .	49
4.2.2.	Vollfaktorieller Versuchsplan . . . . .	51
4.2.3.	Monte-Carlo . . . . .	51
4.2.4.	Latin Hypercube . . . . .	51
4.2.5.	Zentrische Voronoi-Tessellierung . . . . .	53
4.2.6.	Latinisierte zentrische Voronoi-Tessellierung . . . . .	57
4.2.7.	Bewertung der Versuchspläne . . . . .	57

4.3.	Sensitivitätsanalyse . . . . .	59
4.3.1.	Zielsetzung der Sensitivitätsanalyse . . . . .	59
4.3.2.	Korrelationskoeffizient als Maß der Sensitivität . . . . .	60
4.3.3.	Methode nach Morris . . . . .	60
4.3.4.	Differenzenquotient an einer Nominalstelle . . . . .	63
4.3.5.	Bewertung der Sensitivitätsverfahren . . . . .	64
4.3.6.	Parametermodifikation nach der Sensitivitätsanalyse . . . . .	65
4.4.	Überblick Metamodelle . . . . .	65
4.4.1.	Zielstellung . . . . .	65
4.4.2.	Konzeptuelle Metamodellerstellung . . . . .	66
4.4.3.	Überblick Metamodellansätze . . . . .	67
4.4.4.	Überblick Multilevel-Metamodelle . . . . .	72
4.5.	Kriging . . . . .	73
4.5.1.	Modellannahmen . . . . .	74
4.5.2.	Modellierung der Korrelation . . . . .	76
4.5.3.	Ermittlung des Krigingschätzers . . . . .	80
4.5.4.	Maximum Likelihood Optimierung der Kriging-Hyperparameter . . .	84
4.6.	Hierarchisches Kriging . . . . .	88
4.6.1.	Mathematische Grundlagen zur Erstellung von Hierarchischen Kri- gingmodellen . . . . .	88
4.6.2.	Verifikation und Validierung . . . . .	89
4.7.	Quantifizierung der Metamodellgenauigkeit . . . . .	91
4.7.1.	Kreuzvalidierung . . . . .	91
4.7.2.	Metriken . . . . .	92
4.8.	Adaptive Stützpunkterweiterung . . . . .	96
4.8.1.	Unterteilung des Entwurfsraums . . . . .	96
4.8.2.	Bewertung der lokalen Approximationsgüte . . . . .	97
4.8.3.	Stützstellensuche über MSE . . . . .	98
4.8.4.	Stützstellensuche über MSE und relativen Fehler im hierarchischen Krigingmodell . . . . .	98
4.8.5.	Erweiterung des Krigingmodells . . . . .	99

4.9. Gesamtbetrachtung der Metamodellerstellung . . . . .	99
4.9.1. Aufwandsabschätzung . . . . .	99
4.9.2. Anforderungen an Entwurfsraum und Zielgrößen zur Metamodellnutzung . . . . .	101
4.9.3. Kriterien für Multilevel-Metamodelle . . . . .	102
4.10. Zusammenfassung . . . . .	102
<b>5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken</b>	<b>104</b>
5.1. Zielstellung . . . . .	104
5.2. Analyseverfahren . . . . .	104
5.2.1. Schubstarrer Balken . . . . .	106
5.2.2. Schubweicher Balken . . . . .	107
5.2.3. Klassische Anwendungsgrenzen von schubstarren Balken . . . . .	109
5.3. Parameterauswahl . . . . .	110
5.4. Sensitivitätsanalyse . . . . .	111
5.4.1. Differenzenquotient an einer Nominalstelle . . . . .	113
5.4.2. Korrelation und Morris-Methode . . . . .	114
5.4.3. Bewertung der verwendeten Sensitivitätsanalysemethoden . . . . .	114
5.5. Krigingmodellerstellung und Genauigkeitsbewertung . . . . .	117
5.5.1. Versuchsplanerstellung . . . . .	117
5.5.2. Multilevel-Metamodell der Balkenverformung . . . . .	118
5.5.3. Krigingmodell der logarithmischen Balkenverformung . . . . .	122
5.5.4. Krigingmodell mit adaptiv erweiterten Stützstellen . . . . .	127
5.6. Bewertung der Fehler-Metriken . . . . .	129
5.6.1. Bewertung von Metamodellen mit einem Level . . . . .	129
5.6.2. Bewertung Multilevel-Metamodelle . . . . .	132
5.7. Untersuchung der Methoden zur Versuchsplanerstellung . . . . .	132
5.8. Zusammenfassung . . . . .	133
<b>6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse</b>	<b>135</b>
6.1. Zielstellung . . . . .	135
6.1.1. Zielgröße . . . . .	135

6.1.2. Zielgenauigkeit . . . . .	136
6.2. Parametrisierung eines Panels für die Stabilitätsanalyse . . . . .	137
6.2.1. Konstante Größen . . . . .	137
6.2.2. Parametrisierung eines Laminates . . . . .	138
6.2.3. Verwendete Parameter . . . . .	141
6.3. Sensitivitätsanalyse und Anpassung der Parametrisierung . . . . .	143
6.4. Versuchsplanung und Metamodellgenerierung . . . . .	146
6.5. Bewertung der Metamodelle . . . . .	147
6.5.1. Basismetamodell . . . . .	147
6.5.2. Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell . . . . .	149
6.5.3. Anwendungsbereich der Multilevel-Metamodelle . . . . .	154
6.6. Klassifikation der Stützstellen nach Stabilitätsmodus . . . . .	160
6.6.1. Klassifikationsverfahren . . . . .	160
6.6.2. Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell nach Selektion der Haut- beulmoden . . . . .	165
6.6.3. Hautfeldbeulen unter axialer Belastung . . . . .	165
6.7. Zusammenfassung . . . . .	166
<b>7. Perspektiven der Stabilitätsanalyse mit Multilevel-Metamodellen</b>	<b>167</b>
7.1. Zusammenfassung . . . . .	167
7.2. Zukünftige Betrachtungen . . . . .	169
7.2.1. Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	169
7.2.2. Stabilitätsanalyse im Nachbeulbereich . . . . .	169
7.2.3. Parametrisierung und Metamodellbildung . . . . .	170
<b>A. Lastermittlung in BEOS</b>	<b>173</b>
<b>B. Stützpunkte zur Balkenanalyse</b>	<b>175</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>178</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Oft existieren verschiedene Modelle, die das gleiche Phänomen abbilden, sich jedoch in Modellgüte und den Analysekosten unterscheiden [PWG18] . . . .	3
2.1. Prozess zur Erstellung von einfachen Metamodellen . . . . .	8
2.2. Entwicklungsschema zur Modellerstellung und -absicherung nach Schlesinger [Sch79]. . . . .	10
2.3. Entwicklungsschema zur Modell- und Metamodellerstellung sowie Qualitätssicherung und ihre Beziehung zueinander . . . . .	12
2.4. Entwicklungsschema zur Erstellung und Qualitätssicherung von Multilevel-Metamodellen, das auf einem validierten Basismodell und Basismetamodell sowie auf einem validierten Zielmodell beruht. . . . .	13
3.1. Idealierte Darstellung eines Flugzeugrumpftonne (oben links) und eines Ausschnittes davon (oben rechts) aus [Bü06] sowie eines Ausschnittes aus einem Flügel- bzw. Leitwerkskasten (unten links) und einer Veranschaulichung des Unterschalenpaneels mit seinen Bestandteilen (unten rechts). . . . .	17
3.2. Ausschnitt eines Rumpfpaneels aus dem Projekt MAAXIMUS bestehend aus Haut, Spanten, Mouseholes, Stringern mit Duckfeets, Nieten, Klebschicht und Clips. [Her15] . . . . .	17
3.3. Geometrische Größen eines Panels . . . . .	20
3.4. Veranschaulichung der Koordinaten eines Laminates . . . . .	22
3.5. Qualitative Darstellung des Beulverhaltens dünnwandiger Schalen mit Beulla- stüberschreitung [VDI06] . . . . .	25
3.6. Veranschaulichung eines instabilen Stabilitätsverhaltens [VDI06] . . . . .	26
3.7. Qualitatives Last-Verschiebungsverhalten einer gekrümmten versteiften Schale unter axialer Drucklast (nach Arbocz [AB10]) . . . . .	27
3.8. Koordinatensystem des verwendeten Stabilitätsanalyseprogramms . . . . .	30

3.9. Veranschaulichung des verwendeten Strukturmodells . . . . .	31
3.10. Referenzebene in BEOS . . . . .	32
3.11. Vergleich der Beuleigenformen in Abhängigkeit der Randbedingungen: Links werden die Randbedingungen aus Tabelle 3.2 verwendet. Rechts werden die Verschiebungen $u$ an den Rändern $y = 0$ und $y = l_y$ freigelassen, wodurch sich die Maxima der Beuleigenform an den Rand verschieben. . . . .	34
3.12. Modellerte Lastverteilung für die lasttragenden Strukturen Haut (H), Fuß (F) und das gesamte Paneel für mehrachsige Lastfälle . . . . .	35
3.13. Numerische Konvergenz der Beullast (blau) des grob diskretisierten Modells am Beispiel einer Variation des Stringerabstandes. Zur Verdeutlichung von Unstetigkeiten ist der Differenzenquotient (grün) dargestellt. . . . .	37
3.14. Verwendetes FEM-Modell in Abaqus mit seinen Bestandteilen . . . . .	38
3.15. Koordinatensystem und Bezeichnungen im hochaufgelösten Modell zur Definition von Randbedingungen a) Draufsicht b) Seitenansicht . . . . .	40
3.16. Numerische Konvergenz der Beullast des hochaufgelösten Modells am Beispiel einer Variation des Stringerabstandes. Zur Verdeutlichung von Unstetigkeiten ist der Differenzenquotient, die Iterationsanzahl und die Elementanzahl zwischen zwei benachbarten Stringern dargestellt. . . . .	42
3.17. Vergleich der Beullasten $N$ ermittelt mit dem grob diskretisierten und dem hochaufgelösten Modell in Abhängigkeit wichtiger Parameter. . . . .	45
4.1. Beispiel eines Latin Hypercubes mit 2 Parametern und 5 Stützstellen im Einheitsparameterraum. . . . .	52
4.2. Beispiel einer initialen Voronoi Tesselierung (links) und einer Centroidal Voronoi Tesselierung (rechts) von Saka [SGB07]. Der schwarze Punkt stellt die Stützstelle und der weiße den Flächenschwerpunkt dar. . . . .	54
4.3. Iterationsschritt aus Algorithmus 3 von Ju. Die neuen Generatoren $X_{neu}$ werden aus einer Linearkombination der alten Generatoren $X_{alt}$ und der arithmetischen Mittel $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ der Mengen $(W_1, \dots, W_n)$ erzeugt. . . . .	56
4.4. Beispielhafte Stützstellenverteilung verschiedener Versuchspläne mit 51 Stützstellen im normierten Entwurfsraum $\tilde{\Omega} = [0, 1]^d$ a) Vollfaktorieller Versuchsplan (49 Stützstellen), b) Monte Carlo, c) Latin Hypercube, d) CVT, e) LCVT . . . . .	58
4.5. Beispielhafte Darstellung eines Versuchsplans $B^*$ in einem dreidimensionalen Entwurfsraum $d = 3$ und $n_b = 3$ . . . . .	62

4.6.	Veranschaulichung von Unter- und Überanpassung am Beispiel einer quadratischen Funktion mit überlagertem Rauschen. Das unterangepasste Metamodell bietet nicht genug Modellflexibilität um die Stützpunkte zu approximieren, wohingegen das überangepasste Metamodell unerwünschte Eigenschaften der Stützpunkte modelliert. . . . .	67
4.7.	a) Veranschaulichung der verschiedenen Korrelationsmodelle für $\theta = 1.0$ und b) Auswirkung verschiedener $\theta$ auf die Korrelationsmodelle am Beispiel der Gauß-Funktion $\mathcal{R}_{Gauss}$ . . . . .	77
4.8.	Abbildung a) bis e) zeigen das Krigingmodell für die Funktion 4.58 und veranschaulichen die Abhängigkeit vom Hyperparameter $\theta$ mit Gauß'scher Korrelationsfunktion 4.54 und konstanter Regression $f(x)$ aus Gleichung 4.45. Für kleine $\theta$ wird die Kondition $\kappa(\tilde{R})$ der modifizierten Korrelationsmatrix $\tilde{R}$ sehr hoch wie in Abbildung e). In Abbildung f) bis h) wird eine Regularisierung von $R$ der Höhe $\lambda$ vorgenommen, um $\kappa(\tilde{R})$ zu reduzieren. Dies überführt das interpolierende Krigingmodell in ein approximierendes, in dem die Stützpunkte vom Krigingmodell nicht exakt getroffen werden. Diese Abbildung ist eine Erweiterung aus Sauerbrei und Freund [SF13]. . . . .	79
4.9.	Veranschaulichung des MSE eines Krigingmodells, das auf 5 gleichmäßig verteilten Stützpunkten der Testfunktion 4.58 beruht. . . . .	88
4.10.	Veranschaulichung des Potentials hierarchischer Metamodelle. . . . .	90
5.1.	Schematische Darstellung eines einseitig eingespannten Balkens in der Seitenansicht links und im Querschnitt rechts mit einem Moment $M$ , einer Kraft $F$ und einer Linienlast $q$ . . . . .	105
5.2.	Überlagerung der Biege- und Schubverformung eines Balkens nach der Theorie von Timoshenko . . . . .	108
5.3.	a) Verformung eines schubweichen Balkens; b) Logarithmische Verformung eines schubweichen Balkens; c) Verhältnis zwischen Schub- und Biegeverformung (Ansicht rotiert) d) Differenz zwischen Verformungen des schubweichen und schubstarken Balkens. Alle Abbildungen beinhalten die Iso-Verhältnislينien $u^{(s)}/u^{(b)} = \{0.002, 0.01, 0.05\}$ . . . . .	112
5.4.	Verformung des Balkens um die Nominalstelle herum . . . . .	113

5.5.	Erwartungswerte der Sensitivitätskoeffizienten und deren Standardabweichungen von 100 Versuchen für die Stützstellenmengengrößen $n_X = \{10, 30, 100, 300, 1000, 3000\}$ . . . . .	115
5.6.	Vergleich der skalierten Sensitivitätskoeffizienten von Balkenlänge $l$ und Balkenhöhe $h$ ermittelt mit den verschiedenen Sensitivitätsanalyseverfahren. . . .	116
5.7.	a) Krigingmodell aus den 101 gegebenen Basismodellstützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Basismodell mit $l = 6$ und $h \in \mathbb{R}   0.3 \leq h \leq 0.5$ . c) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Basismodell mit $l \in \mathbb{R}   1 \leq l \leq 6$ und $h = 0.3$ . . . . .	119
5.8.	a) Krigingmodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Zielmodell mit $l \in \mathbb{R}   1 \leq l \leq 11$ und $h = 0.3$ . c) Multilevel-Metamodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen und dem Basismetamodell mit seinen Stützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. d) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Zielmodell mit $l \in \mathbb{R}   1 \leq l \leq 11$ und $h = 0.3$ . . . . .	120
5.9.	a) Krigingmodell aus den 101 gegebenen logarithmischen Basismodellstützstellen $\{X^{(b)}, Y_{log}^{(b)}\}$ . Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Basismodell mit $h = 0.3$ und $l \in \mathbb{R}   1 \leq h \leq 6$ . c) Krigingmodell im logarithmischen Raum, das in den nicht-logarithmischen Raum transformiert wurde. d) Ausschnitt aus dem Krigingmodell aus c) und Basismodell mit $h = 0.3$ und $l \in \mathbb{R}   1 \leq h \leq 6$ . .	124
5.10.	a) Logarithmisches Krigingmodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen im nicht-logarithmischen Raum. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem vorherigen Krigingmodell und Zielmodell mit $h = 0.3$ . c) Logarithmisches Multilevel-Metamodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen im nicht-logarithmischen Raum und dem Basismetamodell mit seinen Stützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. d) Ausschnitt aus dem vorherigen Krigingmodell und Zielmodell mit $h = 0.3$ . . . . .	125



5.11. Konvergenzverhalten der adaptiven Stützpunkterweiterung mit Zielmodellstützpunkten. a) $e_{RMSRE}$ der Ziel-Teststellen und der Krigingmodellergebnisse b) $e_{RMSRE}$ der Kreuzvalidierungswerte und der Krigingmodellergebnisse c) Finale Stützstellenverteilung mit dem MSE-Kriterium d) Finale Stützstellenverteilung mit dem MSE-RelErr-Kriterium . . . . .	128
5.12. Bewertung der Methoden zur Versuchsplanerstellung über Maximin-Metrik, $e_{RMSRE}$ und ihre Standardabweichungen aus je 100 Versuchen. . . . .	133
6.1. Der vollfaktorielle Versuchsplan der Parameter zeigt die Biegesteifigkeitskombinationen aller Ecken im Parameterraum. Die Biegesteifigkeiten von Haut und Stringersteg sind auf die Hautfeldlänge bezogen. Gestrichelt dargestellt ist die daraus resultierende konvexe Hülle. . . . .	143
6.2. Vergleich verschiedener Varianten des skalierten Sensitivitätskoeffizienten nach Morris und den Standardabweichungen aus 10 Iterationen. . . . .	144
6.3. Vergleich der skalierten Sensitivitätskoeffizienten sortiert nach der modifizierten Methode nach Morris. . . . .	145
6.4. Entwicklung des Modellfehler der Basismodelle mit $n^{(b)} = (51, 101, 201, 501, 1001, 2001, 3001)$ . . . . .	149
6.5. Abhängigkeit der Modellfehler des Basis-, Ziel- und Multilevel-Metamodells ( $\hat{N}_{n=1001}^{(b)}, \hat{N}^{(z)}, \hat{N}^{(zb)}$ ) von der Anzahl der Zielmodellstützpunkte. Zusätzlich sind die Metamodelle $\hat{N}_{X^{(z)}/X_{red}}^{(z)}$ und $\hat{N}_{X^{(z)}/X_{red}}^{(zb)}$ angegeben, die jeweils aus einer Untermenge der Stützpunkte $(X_{n=501}^{(z)}, Y_{n=501}^{(z)})$ erzeugt werden. . . . .	150
6.6. Modellfehler des Multilevel-Metamodells in Abhängigkeit der Anzahl der Basis- und Zielmodellstützpunkte . . . . .	152
6.7. Die Punkte sind ermittelte Modellfehler der Ziel- und Multilevel-Metamodelle in Abhängigkeit der Anzahl der jeweiligen Basis- und Zielmodellstützpunkte. Die Linien beschreiben die Fehlerschätzer der ermittelten Modellfehler der Zielmetamodelle (gestrichelt) und der Multilevel-Metamodelle (durchgezogene Linien). . . . .	156
6.8. Vergleich Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell; a) Abschätzung des Fehlerverhältnisses bei gleichem numerischen Aufwand; b) Abschätzung des Aufwandsverhältnisses bei gleichem Metamodellfehler (Die nötige Anzahl an Zielmetamodellstützstellen $n^{(z)}$ wird so ermittelt, dass die jeweilige Gleichung erfüllt ist.) . . . . .	158

6.9.	Bewertung der Kriterien von Toal; a) Abschätzung des Fehlerverhältnisses bei gleichem numerischen Aufwand; b) Anteil der Zielmodellstützpunkte, die bei numerischen Aufwand in Basismodellstützpunkte umgewandelt werden . . .	159
6.10.	Verwendete Knotenmengen zur Verschiebungsauswertung für lokales Versteifungsbeulen und globales Beulen . . . . .	161
6.11.	Stabilitätsmodi verschiedener Paneelkonfigurationen unter reiner Druckbelastung. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Das Grenzverhältnis aus Gleichung 6.17 mit $\tilde{u}_{1,max}^H = 0.55$ , $\tilde{u}_{2,max}^{(So)} = 0.3$ , $\tilde{u}_{1,max}^{(Su)} = 0.15$ definiert farbigen die Bereiche. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Die Achse für Hautfeldbeulen verläuft horizontal, für lokales Versteifungsbeulen von links oben nach rechts unten und für globales Beulen von links unten nach rechts oben. . . .	162
6.12.	Stabilitätsmodi verschiedener Paneelkonfigurationen unter mehrachsiger Druck- und Schubbelastung. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Das Grenzverhältnis aus Gleichung 6.17 mit $\tilde{u}_{1,max}^H = 0.55$ , $\tilde{u}_{2,max}^{(So)} = 0.3$ , $\tilde{u}_{1,max}^{(Su)} = 0.15$ definiert farbigen die Bereiche. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Die Achse für Hautfeldbeulen ist horizontal, für lokales Versteifungsbeulen von links oben nach rechts unten und für globales Beulen von links unten nach rechts oben. .	163
7.1.	Ermittelte kritische Lasten eines Paneels in Abhängigkeit zur Stringerhöhe $b_S$ . In der linearen Stabilitätsanalyse ist die kritische Last die Beullast. In der nichtlinearen Stabilitätsanalyse sind die kritischen Lasten durch Verschiebungsschwellenwerte und Festigkeitsgrenzen definiert. Die Paneelausprägung kann Liebisch und Freund [LF14] entnommen werden. . . . .	171

# Tabellenverzeichnis

3.1. Kenngrößen des Referenzpaneels . . . . .	19
3.2. Verwendete Randbedingungen für axial belastete Schalen in BEOS . . . . .	33
3.3. Verwendete Randbedingungen im hochaufgelösten Modell . . . . .	40
3.4. Diskretisierung des hochaufgelösten Modells in dieser Arbeit im Vergleich . .	42
4.1. Aufwandsabschätzung der Krigingmodellerstellung aus Abbildung 2.1 vom Versuchsplan bis zum finalen Metamodell und Versuchsplanerweiterung. . .	100
5.1. Nominalwerte des Balkenmodells . . . . .	105
5.2. Größen des Entwurfsraums . . . . .	111
5.3. Sensitivitätskoeffizienten der Parameter Balkenlänge $l$ und Balkenhöhe $h$ er- mittelt mit den verschiedenen Sensitivitätsanalyseverfahren. . . . .	116
5.4. Anzahl der Stützstellen der verschiedenen Stützpunktmengen für das Basis- und Zielmodell, sowie deren Testpunkte . . . . .	118
5.5. Fehlerwerte der Krigingmodelle $\hat{u}^{(b)}$ , $\hat{u}^{(z)}$ und $\hat{u}^{(zb)}$ in Abhängigkeit verschie- dener Fehlermetriken. Die ersten vier Metriken vergleichen mit den Testda- ten des Zielmodells, die anderen Metriken vergleichen mit den Kreuzvalidie- rungswerten. Zum Vergleich sind die Fehlerwerte des Basismodells $u^{(b)}$ im Vergleich zu den Zielmodelltestpunkten dargestellt. . . . .	121
5.6. Fehlerwerte der Krigingmodelle $\hat{u}_{log}^{(b)}$ , $\hat{u}_{log}^{(z)}$ und $\hat{u}_{log}^{(zb)}$ in Abhängigkeit verschie- dener Fehlermetriken. Im nicht-logarithmischen Raum vergleichen die ersten vier Metriken mit den Testdaten des Zielmodells und die anderen Metriken mit den Kreuzvalidierungswerten. . . . .	126

5.7.	Korrelation der Fehlerwerte $e_{RMSRE,T}$ , $e_{MSE,K}$ , $e_{RMSE,K}$ , $e_{MSRE,K}$ , $e_{RMSRE,K}$ , $e_{MaxRE,K}$ , $e_{MRE,K}$ und $1 - r_K^2$ aus 1000 Krigingmodellerstellungen mit je 101 Stützstellen. Die Krigingmodellwerte wurden für die Metriken mit Index $T$ mit Testwerten und für Metriken mit Index $K$ mit Kreuzvalidierungswerten verglichen. . . . .	130
5.8.	Korrelation der Fehlermetriken $e_{RMSRE,T}$ , $e_{MSE,K}$ , $e_{RMSE,K}$ , $e_{MSRE,K}$ , $e_{RMSRE,K}$ , $e_{MaxRE,K}$ , $e_{MRE,K}$ und $1 - r_K^2$ aus 1000 Krigingmodellerstellungen aus 1000 Krigingmodellerstellungen mit 51 bis 100 Stützstellen. Die Fehlerwerte wurden für die Metriken mit Index $T$ mit Testwerten und für Metriken mit Index $K$ mit Kreuzvalidierungswerten erstellt. . . . .	131
6.1.	Beullasten von Paneelen mit unterschiedlichen Lagenreihenfolgen bzw. der homogenisierten Steifigkeitsmatrix. Die Lagendickenanteile $t_\alpha$ jeder Lagenrichtung sind dabei konstant. . . . .	141
6.2.	Initiale Parameter des Entwurfsraums . . . . .	142
6.3.	Übersicht über Versuchspläne des Basis- und Zielmodells mit der Parameteranzahl $d$ und der Stützpunktanzahl $n$ . . . . .	147
6.4.	Modellfehler der Metamodelle $\hat{N}^{(b)}$ mit 13 bzw. 10 Parametern im Vergleich zu den 10- und 13-dimensionalen Testpunkten $Y_{test}^{(b)}$ des Basismodells sowie den Kreuzvalidierungswerten $\hat{Y}_{X/\{x_i\}}^{(b)}$ . . . . .	148
6.5.	Gütwerte der Krigingmodelle $\hat{N}_{n=1001}^{(b)}$ , $\hat{N}^{(z)}$ und $\hat{N}^{(zb)}$ im Abhängigkeit von den Testpunkten des Zielmodells $Y_{test}^{(z)}$ . . . . .	149
6.6.	Korrelation der Modellfehlerwerte $e_{Modell}(X_{test}^{(z)})$ und der geschätzten Modellfehlerwerte $\hat{e}_{Modell}(X_{test}^{(z)})$ an den Zielmodellstützstellen. . . . .	153
6.7.	Laufzeiten zur Erstellung der Basismetamodelle . . . . .	155
6.8.	Gütwerte der auf die Hautbeulmoden reduzierten Metamodelle $\hat{N}_H^{(z)}$ und $\hat{N}_H^{(zb)}$ im Vergleich zu den Testpunkten des Zielmodells. . . . .	165
6.9.	Gütwerte der auf die Hautbeulmoden reduzierten Metamodelle $\hat{N}_{x,H}^{(z)}$ und $\hat{N}_{x,H}^{(zb)}$ im Vergleich zu den Testpunkten des Zielmodells. . . . .	166
B.1.	Stützpunkte des Zielmodells anhand der Zielstützstellen $X^t$ zur Verformungsanalyse des Balkens in Kapitel 5; $u_t(X^t)$ in $[m]$ . . . . .	175
B.2.	Stützpunkte des Basismodells anhand der Basisstützstellen $X^b$ zur Verformungsanalyse des Balkens in Kapitel 5; $u_b(X^b)$ in $[m]$ . . . . .	176

B.3. Stützpunkte des Basis- und Zielmodells anhand der Teststellen $X_{test}$ zur Verformungsanalyse des Balkens in Kapitel 5; $u^b(X_{test})$ und $u^t(X_{test})$ in $[m]$ . . . .	177
---	-----

# Nomenklatur

## Abkürzungen

ANN	Artificial Neural Network
ASME	American Society of Mechanical Engineers
BEOS	Buckling of Eccentrically Orthotropic Shells
BLUE	Best Linear Unbiased Estimator
CVT	Centroidal Voronoi Tessellation
DACE	Design and Analysis of Computer experiments
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
EGO	Efficient Global Optimization
FEM	Finite Elemente Methode
FFD	Full Factorial Design
FWW	Faserverbundwerkstoff
IFFD	Iteratives fraktionelles faktorielles Design
LCVT	Latinized Centroidal Voronoi Tessellation
LHS	Latin Hypercube Sampling
LL	Limit Load (erlaubte Last)
LOO	Leave One Out
MAAXIMUS	More Affordable Aircraft through eXtended, Integrated and Mature nUmerical Sizing
MAE	Mean Absolute Error
MaxSE	Maximum Scaled Error
MaxRE	Maximum Relative Error

MLE	Maximum Likelihood Estimation
MPC	Multiple Point Constraint
MRE	Mean Relative Error
MSE	Mean Square Error
MSRE	Mean Square Relative Error
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RBF	Radiale Basisfunktion
RMSE	Root Mean Square Error
RMSRE	Root Mean Square Relative Error
SRS	Simple Random Sampling
UL	Ultimate Load (Versagenslast)
VFM	Variable-Fidelity Model

## Indizes, Superskripte und Schreibweisen

$(\hat{\phantom{x}})$	Schätzer einer Funktion
$(\tilde{\phantom{x}})$	Normierte Größe
$(\bar{\phantom{x}})$	Mittelwert
$(\phantom{x})^{(b)}$	Basismodell
$(\phantom{x})^{(z)}$	Zielmodell
$(\phantom{x})^{(zb)}$	Multilevel-Metamodell
$(\phantom{x})_F$	Eigenschaft des Stringerfußes
$(\phantom{x})_H$	Eigenschaft der Paneelhaut
$(\phantom{x})_S$	Eigenschaft des Stringersteges
$(\phantom{x})_{log}$	Dekadischer Logarithmus einer Größe

# Symbole

$\Delta$	Schrittweite $\Delta \in \mathbb{R}, [ \ ]$
$\Pi$	Potentielle Energie einer Struktur
$\Omega$	Entwurfsraum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
$\tilde{\Omega}$	Normierter Entwurfsraum $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \mid \tilde{\Omega} = [0, 1]^d$
$\eta_{KV}$	Zielgenauigkeit; Schwellenwert zur Stützstellensuche $\eta_{KV} \in \mathbb{R}, [ \ ]$
$\kappa$	Konditionszahl einer Matrix $\kappa \in \mathbb{R}, [ \ ]$
$\kappa_b$	Korrekturfaktor für den schubweichen Balken $\kappa_b \in \mathbb{R}, [ \ ]$
$\lambda$	Skalierungsfaktor einer Matrix; Eigenwert der linearen Stabilitätsanalyse oder Regularisierungsparameter eines Metamodells $\lambda \in \mathbb{R}, [ \ ]$
$\nu$	Querkontraktionszahl $\nu \in \mathbb{R}, [ \ ]$
$\xi$	Sensitivität der Designgrößen $\xi \in \mathbb{R}^d, [ \ ]$
$\sigma$	Standardabweichung oder Spannung
$\phi$	Winkel zum schubweichen Balken $\phi \in \mathbb{R}, [rad]$
$\varphi$	Lastrichtungswinkel zwischen Druck- und Schublast $\varphi \in \mathbb{R}, [^\circ]$
$\omega$	Gewichte eines Metamodells $\omega \in \mathbb{R}^n, [ \ ]$
$Cor$	Korrelationskoeffizient zweier Funktionen oder Mengen
$Cov$	Kovarianz zweier Funktionen oder Mengen
$D^*$	Stern-Diskrepanz
$E$	Elastizitätsmodul $E \in \mathbb{R}, \left[ \frac{N}{m^2} \right]$
$EA$	Längsdehnsteifigkeit $EA \in \mathbb{R}, [N]$
$EI$	Biegedehnsteifigkeit $EI \in \mathbb{R}, [Nm]$
$E(X)$	Erwartungswert einer Funktion oder Menge
$F$	Kraft $F \in \mathbb{R}, [N]$
$G$	Schubmodul $G \in \mathbb{R}, \left[ \frac{N}{m^2} \right]$
$I$	Flächenträgheitsmoment 2. Grades $I \in \mathbb{R}, [m^4]$
$N$	Kraftfluss $N \in \mathbb{R}, [N/m]$
$Q$	Scheibensteifigkeitsmatrix



$S$	Fläche einer dünnwandigen Struktur $S \in \mathbb{R}, [m^2]$
$T$	Torsionsdehnsteifigkeit $T \in \mathbb{R}, [ ]$
$Var$	Varianz einer Funktion oder Menge
$\hat{X}$	Menge der skalierten Designparameter $\hat{X} \subset \tilde{\Omega}, [ ]$
$\hat{Y}_{X/\{x_i\}}$	Vektor der Kreuzvalidierungswerte
$a$	Spantabstand $a \in \mathbb{R}, [m]$
$\alpha$	Elementarer Effekt der Designgrößen $\alpha \in \mathbb{R}^d, [ ]$
$b$	Stringerabstand $b \in \mathbb{R}, [m]$
$b_b$	Breite des Biegebalkens $b_b \in \mathbb{R}, [m]$
$b_F$	Stringerfußbreite $b_F \in \mathbb{R}, [m]$
$b_s$	Stringersteghöhe $b_s \in \mathbb{R}, [m]$
$c$	Numerischer Aufwand zur Erstellung von Stützpunkten oder Metamodellen
$c_r$	Relativer Aufwand zwischen Basismodellauswertung und Zielmodellauswertung $c_r \in \mathbb{R}, [ ]$
$d$	Anzahl der Entwurfsparameter $d \in \mathbb{N}, [ ]$
$e$	Fehlerwert zweier Wertereihen
$e_{off}$	Abstand einer Laminatschicht zur Referenzebene $e \in \mathbb{R}, [m]$
$f_r$	Anteil der Zielmodellstützpunkte, die bei gleichbleibendem Erstellungsaufwand in Basismodellstützpunkte umgewandelt werden $f_r \in \mathbb{R}, [ ]$
$h$	Höhe des Biegebalkens $h \in \mathbb{R}, [m]$
$l$	Entfernung zweier Punkte im Raum $l \in \mathbb{R}, [m]$
$lb$	Untere Grenzen der Designparameter $lb \in \mathbb{R}^d$
$l_x$	Paneellänge in axialer Richtung $l_x \in \mathbb{R}, [m]$
$l_y$	Paneellänge in y-Richtung $l_y \in \mathbb{R}, [m]$
$m$	Anzahl der Unterteilungen im Entwurfsraum $m \in \mathbb{N}, [ ]$
$n$	Anzahl der Stützstellen $n \in \mathbb{N}, [ ]$
$n^{(b)}$	Anzahl der Basismodellstützpunkte $n^{(b)} \in \mathbb{N}, [ ]$
$n_b$	Anzahl der Stellen zum Teilen einer Designgröße $n_b \in \mathbb{N} \mid n \geq 1, [ ]$

$n_q$	Anzahl der Hilfsstützstellen für CVT $n_q \in \mathbb{N}, [ \ ]$
$n_{str}$	Anzahl der Stringer $n_{str} \in \mathbb{N}, [ \ ]$
$n^{(z)}$	Anzahl der Zielmodellstützpunkte $n^{(z)} \in \mathbb{N}, [ \ ]$
$n^{(zb)}$	Anzahl der Multilevel-Metamodellstützpunkte $n^{(zb)} \in \mathbb{N}, [ \ ]$
$r$	Paneelradius $r \in \mathbb{R}, [m]$
$r_{ee}$	Anzahl elementaren Effekte pro Parameter $r_{ee} \in \mathbb{N}, [ \ ]$
$t_F$	Stringerfußdicke $t_F \in \mathbb{R}, [m]$
$t_{F0}$	Gesamtdicke der $0^\circ$ Lagen im Stringerfuß $t_{F0} \in \mathbb{R}, [m]$
$t_{F\pm 45}$	Gesamtdicke der $\pm 45^\circ$ Lagen im Stringerfuß $t_{F\pm 45} \in \mathbb{R}, [m]$
$t_{F90}$	Gesamtdicke der $90^\circ$ Lagen im Stringerfuß $t_{F90} \in \mathbb{R}, [m]$
$t_H$	Hautdicke $t_H \in \mathbb{R}, [m]$
$t_{H0}$	Gesamtdicke der $0^\circ$ Lagen der Paneelhaut $t_{H0} \in \mathbb{R}, [m]$
$t_{H\pm 45}$	Gesamtdicke der $\pm 45^\circ$ Lagen der Paneelhaut $t_{H\pm 45} \in \mathbb{R}, [m]$
$t_{H90}$	Gesamtdicke der $90^\circ$ Lagen der Paneelhaut $t_{H90} \in \mathbb{R}, [m]$
$t_K$	Gesamtdicke des Stringerkerns $t_K \in \mathbb{R}, [m]$
$t_L$	Lagendicke $t_L \in \mathbb{R}, [m]$
$u$	Verschiebung in axialer Richtung $u \in \mathbb{R}, [m]$
$ub$	Obere Grenzen der Designparameter $ub \in \mathbb{R}^d$
$v$	Verschiebung in z-Richtung $v \in \mathbb{R}, [m]$
$w$	Verschiebung in y-Richtung $w \in \mathbb{R}, [m]$
$x$	Entwurfsparameter $x \in \Omega, [ \ ]$
$\tilde{x}$	Skalierter Entwurfsparameter $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$

# 1. Einleitung

## 1.1. Leichtbau mit Faserverbundwerkstoffen

In vielen Industriebereichen wie der Luft- und Raumfahrt, Windenergie, Straßen- und Schienenfahrzeugtechnik ist Leichtbau ein zentraler Entwurfsaspekt. Ziel des Leichtbaus ist die Massenminimierung um Kostenvorteile, beispielsweise durch einen geringeren Treibstoffverbrauch, zu erreichen. Umso höher das ökonomische Einsparpotential einer Struktur im Verhältnis zu ihrem Gewicht ist, desto größer ist der Nutzen eines effizienten Leichtbauentwurfs.

In der Luftfahrt führt dies durch ökonomische und politische Anforderungen wie dem Flightpath 2050 der europäischen Kommission [EE11] zu einer steten Weiterentwicklung der verwendeten Leichtbaustrukturen. Ein hohes Potential zur Erreichung der gesetzten ökonomischen und umweltpolitischen Ziele verspricht die Verwendung von Faserverbundwerkstoff (FVW). In den Flugzeugentwicklungsprogrammen zeigt sich dies durch einen stetig steigenden Anteil von FVW an der Strukturmasse. Die Primärstrukturen der aktuellen Flugzeuge Airbus A350 XWB und Boeing 787 bestehen zu großen Anteilen aus FVW. Der Nutzen von FVW liegt in der, im Vergleich zu Aluminium, höheren spezifischen Steifigkeit und Festigkeit. Dies kann leichtere Strukturen ermöglichen, insbesondere wenn ihre richtungsabhängigen Eigenschaften gezielt im Designprozess berücksichtigt werden. Beispielsweise kann so lastflussgerecht konstruiert werden oder die aerodynamischen Eigenschaften durch ein „aerelastic tailoring“ optimiert werden. Der bedarfsgerechte und konsequente Einsatz von FVW kann somit zu geringeren Strukturmassen und einem günstigeren Verhältnis zwischen Nutzlast und Treibstoffverbrauch führen.

Die gezielte Ausnutzung der Lagenorientierung bei FVW verbessert einerseits die mechanischen Eigenschaften. Andererseits wird die Komplexität des Entwurfsprozesses aufgrund einer deutlich höheren Anzahl an Entwurfsfreiheitsgraden erhöht. Zudem muss das Ergebnis der Strukturauslegung mechanische (z.B. Festigkeiten, Ermüdung, Stabilität) und fertigungs-basierte (z.B. Toleranzen, fertigbare Hautdicken, Drapierbarkeit) Anforderungen erfüllen.

Aufgrund dessen sind eine Vielzahl an Strukturanalysen notwendig, da diese Randbedingun-

gen iterativ in allen Bereichen der Struktur unter Berücksichtigung aller kritischen Lasten untersucht werden müssen. Um die gesamte Rechenzeit im Flugzeugentwurf auf ein wirtschaftliches Maß zu beschränken, sollten die Analysezeiten für jede Randbedingung pro Bereich und Iteration, bei hinreichender Genauigkeit, im Bereich von Millisekunden liegen.

### 1.2. Motivation

Im Flugzeugentwurf werden zumeist analytische Methoden (z.B. [HSB09]) zur Strukturauslegung eingesetzt. Diese beruhen entweder auf empirischen Daten oder auf geschlossenen analytischen Formulierungen, welche auf physikalisch basierten Grundannahmen aufbauen aber vereinfachte Modellannahmen und Randbedingungen aufweisen. Nachteilig ist zum einen, dass die empirischen Ansätze ausschließlich für bekannte Strukturkonzepte angewendet werden können, nicht jedoch für neue Bauweisen oder Materialien. Zum anderen werden in den vereinfachten analytischen Modellen einzelne strukturmechanische Effekte vernachlässigt, wodurch als Konsequenz Auswirkungen auf das Traglastverhalten nicht berücksichtigt sind und das Ergebnis bezüglich seines Konservatismus überprüft werden muss. Eine Möglichkeit zur Verbesserung dieser empirischen und analytischen Modelle ist eine empirische Korrektur auf Basis von Informationen aus genaueren, aufwändigeren Modellen oder aus kostenintensiven experimentellen Strukturtests.

Neben den betrachteten schnellen Verfahren existieren aufwändigere aber genauere numerische Modelle, die das gleiche Phänomen betrachten. Diese können auch solche Effekte berücksichtigen, die vereinfachte Formulierungen aufgrund ihrer Modellvereinfachungen nicht abbilden. Deren Einsatz ist in der Entwurfsphase stark eingeschränkt.

Eine andere Möglichkeit zur Integration von Informationen aus genauen aufwändigen Verfahren bei Beibehaltung geringer Analysekosten ist die Bildung von Metamodellen. Solche Modelle sind mathematische Formulierungen zur Interpolation oder Approximierung von Stützpunkten sowie ihren Zwischenbereichen. Hierbei wird auf Basis einer geeigneten Parametrisierung des Entwurfsraums und eines Versuchsplans durch das Ausgangsmodell eine Menge an Stützpunkten erzeugt. Mittels mathematischer Formulierungen wird eine Modellapproximation des ursprünglichen Modells erstellt. Dieses Modell ist nicht mehr physikalisch basiert und nur innerhalb des Entwurfsraums gültig. Allerdings weist es deutlich geringere Analysekosten auf.

Wie von Peherstorfer [PWG18] dargelegt, existieren mehrere Verfahren zur Abbildung desselben Phänomens (siehe Abbildung 1.1) jedoch mit unterschiedlicher Modellgüte und Analyse-

## 1. Einleitung

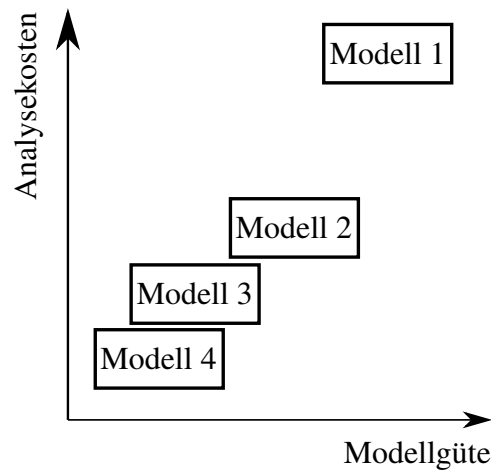


Abbildung 1.1.: Oft existieren verschiedene Modelle, die das gleiche Phänomen abbilden, sich jedoch in Modellgüte und den Analysekosten unterscheiden [PWG18]

kosten. Wenn das Ausgangsmodell sehr teuer ist wie Modell 1, kann die Stützpunkterstellung einen sehr großen Kostenfaktor darstellen. Um diese Kosten zu reduzieren, können Stützpunkte von Analyseverfahren unterschiedlicher Genauigkeit, die das gleiche Phänomen beschreiben, zu einem Multilevel-Metamodell vereint werden. Damit wird ein aus wenigen teuren Stützpunkten erstelltes Metamodell um Informationen aus einem mit vielen günstigen Stützpunkten erstellten Metamodell erweitert. Diese Herangehensweise soll in dieser Arbeit für strukturmechanische Phänomene untersucht und für den effizienten Einsatz im Flugzeugstrukturentwurf adaptiert werden.

### 1.3. Zielsetzung und Hypothesen der Arbeit

Mit der vorliegenden Arbeit soll eine Systematik zur Integration von Multilevel-Metamodellen im Flugzeugentwurf erarbeitet werden. Dies erfordert die Untersuchung von geeigneten Methoden im Prozess zur Metamodellerstellung sowie deren Qualifizierung. Hiermit soll die Bewertungsfähigkeit des strukturmechanischen Verhaltens bezüglich Variationen der Strukturausprägungen verbessert werden. Hieraus werden die folgenden Hypothesen abgeleitet.

**Hypothese 1.** Ein Metamodell, das ein aufwändiges strukturmechanisches Zielmodell beschreibt, kann durch Erweiterung um viele Modellstützpunkte eines weniger aufwändigen Basismodells des gleichen strukturmechanischen Problems verbessert werden.

Mit dieser Hypothese werden folgende Begriffe eingeführt und im Verlauf dieser Arbeit verwendet:

## 1. Einleitung

- Das Basismodell ist eine implementierte Methode, die in einem definierten Entwurfsraum ein Strukturverhalten abbildet.
- Das Basismetamodell ist ein Metamodell basierend auf Stützpunkten im Entwurfsraum, die mit dem Basismodell erzeugt wurden.
- Das Zielmodell ist eine implementierte Methode, die in einem definierten Entwurfsraum ein Strukturverhalten abbildet. Im Vergleich zum Basismodell beinhaltet diese Methode zusätzliche Effekte und/oder Parameter wodurch eine höhere Modellgüte erreicht wird aber auch höhere Analysekosten entstehen.
- Das Zielmetamodell ist ein Metamodell basierend auf Stützpunkten im Entwurfsraum, die mit dem Zielmodell erzeugt wurden.
- Das Multilevel-Metamodell ist ein Metamodell basierend auf mindestens zwei Stützpunktmengen im Entwurfsraum, die einerseits mit dem Basismodell und andererseits mit dem Zielmodell erzeugt wurden.

Das in Hypothese 1 erzeugte Multilevel-Metamodell weist demnach eine höhere Approximationsgüte auf als das Zielmetamodell. Das Zielmetamodell basiert hierbei auf deutlich weniger Stützstellen als das Basismetamodell. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass das Zielmodell die Realität besser abbildet als das Basismodell. Die durch das Verfahren in Hypothese 1 erzielte höhere Modellgüte wird durch zusätzliche Analysekosten für die Erstellung der Basismodellstützpunkte und des Basismetamodells erkauft. Um die Analysekosten zu begrenzen, wird die folgende Hypothese aufgestellt.

**Hypothese 2.** Ein Multilevel-Metamodell kann das strukturmechanische Zielmodell bei gleichen Erstellungskosten besser approximieren als ein Metamodell, das ausschließlich auf den Zielmodellstützpunkten basiert.

Um den zusätzlichen Erstellungsaufwand des Basismodells zu kompensieren, müssen Multilevel-Metamodelle folglich auf weniger Zielmodellstützpunkten basieren. Nach Hypothese 2 können solche Multilevel-Metamodelle bessere Approximationen liefern als das Zielmodell. Wenn diese Erwartung eintritt, soll an ausgewählten Beispielen untersucht werden, wie viele hochwertige Stützstellen im Multilevel-Metamodell weggelassen werden können, um eine ähnliche Modellgüte zu erreichen wie ein definiertes Zielmetamodell. Aus der Anzahl der weggelassenen hochwertigen Stützstellen kann die Zeitersparnis abgeschätzt werden. Dies soll auch dazu genutzt werden, um den Vorteil eines Multilevel-Metamodells in Abhängigkeit von der Anzahl der Zielmodellstützstellen zu bewerten.

**Hypothese 3.** Aus dem Multilevel-Metamodell lässt sich eine Schätzung des Modellfehlers

## 1. Einleitung

zwischen Basis- und Zielmodell ableiten, der im Vergleich zum Basis- und Zielmodell einen deutlichen Zeitvorteil bietet.

Durch die Approximation des Basis- und Zielmodells mit Metamodellen lassen sich diese Modelle im gesamten Entwurfsraum miteinander vergleichen. Dadurch können Regionen im Parameterraum ermittelt werden, in denen das Basismodell eine ungenügende Genauigkeit aufweist und zudem die Identifikation der relevanten Mechanismen und Effekte dieses Modellfehlers unterstützt werden.

Die beschriebenen Hypothesen sollen anhand von zwei mechanischen Phänomenen als Anwendungsfall untersucht werden, um die verwendeten Methoden zunächst grundlegend zu verifizieren und sie anschließend an einem Anwendungsfall mit industrieller Relevanz zu bewerten.

Im ersten Anwendungsfall soll die gerade Biegung eines Balkens betrachtet werden. Dieses Beispiel dient der Verifikation und Kalibrierung der verwendeten Verfahren zur Erstellung und Bewertung von Multilevel-Metamodellen und deren Visualisierung. Zunächst soll das Vorgehen zur Erstellung von gewöhnlichen und Multilevel-Metamodellen an einer analytisch beschriebenen und anschaulichen Fragestellung dargestellt werden. Weiterhin dient dieser Anwendungsfall dem Test und der Kalibrierung aller nötigen Verfahren zur Erstellung und Bewertung von Metamodellen. Durch die Anschaulichkeit und die algebraische Problemformulierung, kann die Güte der Ausgangsmodelle sowie der Metamodelle diskutiert und mit den Metriken zur Bewertung der Modellgüte verglichen werden. Die zur Auswertung der Ergebnisse eingesetzten Verfahren können in dem verwendeten Entwurfsraum mit 2 Parametern anschaulich visuell überprüft werden.

Der zweite Anwendungsfall ist die lineare Stabilitätsanalyse eines Paneels unter Schub- und Druckbelastung. Dieser Anwendungsfall verwendet ein stringer- und spantversteiftes Panel aus FVW als Strukturmodell. Hiermit wird ein in der Literatur gut beschriebenes Phänomen von Leichtbaustrukturen bearbeitet, deren Modelle eine große Anzahl an parametrischen Größen und somit Dimensionen aufweisen. Dieser Anwendungsfall der linearen Stabilitätsanalyse betrachtet somit eine industriell relevante Fragestellung aus der Luft- und Raumfahrttechnik. Für derartige Leichtbaustrukturen ist die Stabilitätsbewertung ein wichtiges Auslegungskriterium. Hierzu liegen validierte Analysemethoden vor, die sich in verschiedene Klassen von Analysekosten und -genauigkeiten einteilen lassen. Hiervon können für diese Arbeit zwei repräsentative Methoden unterschiedlicher Genauigkeit ausgewählt und in Bezug auf Analysekosten und -Genauigkeit abgestimmt werden. Es sollen Metamodelle erstellt werden, die den

## *1. Einleitung*

gesamten Entwurfsraum gut abbilden, anstatt sich auf einen spezifischen Bereich<sup>1</sup> zu fokussieren. Als Folge daraus muss ein Mechanismus zur Quantifizierung der Modellgüte bereitstehen. Um die zuvor beschriebenen Hypothesen zu überprüfen, wird im folgenden Kapitel 2 auf den Prozess zur Metamodellerstellung eingegangen und ein Entwicklungskonzept zur Erstellung von Multilevel-Metamodellen und deren Teilaspekte eingeführt. Anschließend werden in Kapitel 3 die verwendeten Verfahren zur linearen Stabilitätsanalyse und ihre Eigenschaften in Bezug zur Metamodellbildung dargestellt. Kapitel 4 stellt Verfahren vor, die zur Erstellung, Bewertung und Verbesserung von Metamodellen benötigt werden und diskutiert diese. Das anschließende Kapitel 5 verifiziert, bewertet und visualisiert die Verfahren zur Erstellung von Multilevel-Metamodellen. Weiterhin werden die erzeugten Metamodelle bezüglich der Hypothesen bewertet. Diese Erkenntnisse werden in Kapitel 6 aufgegriffen, die Vor- und Nachteile des Multilevel-Metamodells anhand verschiedener Betrachtungen diskutiert sowie eine Methodik zur Problemvereinfachung und Modellverbesserung dargelegt. Kapitel 7 fasst die Ergebnisse zusammen und zeigt zukünftige Perspektiven auf.

---

<sup>1</sup>z.B. ein Bereich um ein Optimum unter konkreten Bedingungen



## **2. Methodik zur Multilevel-Metamodellentwicklung**

Im Folgenden wird die grundsätzliche Vorgehensweise zur Erstellung von Metamodellen dargestellt und ein Entwicklungsschema von Multilevel-Metamodellen und seinen Bestandteilen abgeleitet.

### **2.1. Erstellungsprozess von Metamodellen**

Der Prozess zur Erstellung von einfachen Metamodellen sowie Multilevel-Metamodellen erfolgt prinzipiell nach dem gleichen Vorgehen. Dieses ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Resultate jedes Prozessschrittes sind zwischen den einzelnen Prozessboxen dargestellt.

Zu Beginn steht die Beschreibung des Problems, aus der sich eine Zielstellung ableiten lässt. Hierfür soll eine parametrische Analysemethode bereit stehen, die später angewendet wird. Die Zielstellung definiert die Zielgröße(n), die durch das Metamodell beschrieben werden sollen, sowie die Gütekriterien nach denen ein Metamodell akzeptiert werden soll.

Auf Basis der Zielstellung und der Größen, die in die Analysemethode einfließen, lässt sich eine initiale Menge an Parametern definieren, die für die Zielstellung wichtig sein können. Die Grenzen dieser Parameter werden so definiert, wie sie im Entwurfskontext erwartet werden. Diese spannen den Entwurfsraum auf.

Anschließend werden die definierten Parameter auf ihre Sensitivität überprüft. Hierbei soll der Einfluss jedes Parameters auf das Ergebnis untersucht und bewertet werden. Nicht sensitive Größen können aus der Menge der Parameter entfernt werden. Das Resultat der Sensitivitätsanalyse ist die Menge an sensitiven Parametern, welche die Dimension und Grenzen des Entwurfsraums bestimmen.

Auf Basis der sensitiven Parameter wird ein Versuchsplan erstellt. Dabei werden mehrere Parametersätze – sog. Stützstellen – im Entwurfsraum verteilt. Jede Stützstelle beschreibt dabei eine andere Ausprägung der Struktur.

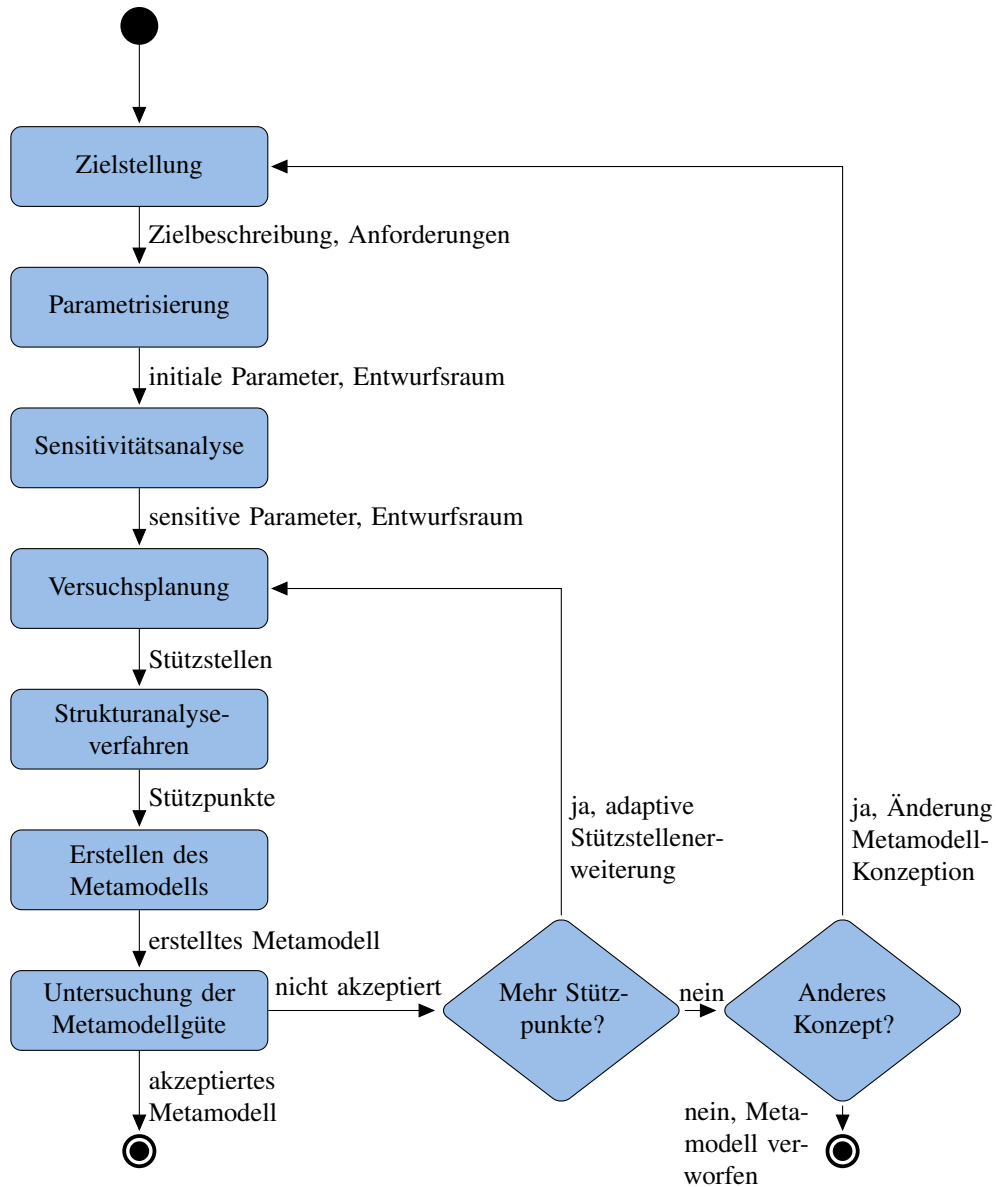


Abbildung 2.1.: Prozess zur Erstellung von einfachen Metamodellen

An den Stützstellen wird anschließend mit Hilfe der Strukturanalyseverfahren die Strukturantwort ermittelt. Somit stehen punktuelle Strukturantworten, die Stützwerte, im Entwurfsraum zur Verfügung. Stützstellen und Stützwerte bilden die Stützpunkte.

Mithilfe der Stützpunkte kann anschließend ein Metamodell erzeugt werden. Dieses approximiert oder interpoliert den Parameterraum.

Folgend wird die Modellgüte überprüft. Erfüllt das Metamodell die Gütekriterien, so wird es akzeptiert und der Prozess zur Metamodellbildung ist beendet. Beim Nichterfüllen der Gütekriterien können als erste Maßnahme weitere Stützpunkte hinzugefügt werden. Hierfür werden weitere Stellen im Entwurfsraum identifiziert, an denen zusätzliche Stützpunkte erzeugt werden, was zur Erstellung eines neuen Metamodells führt.

Wird durch das Hinzufügen von Stützstellen keine ausreichende Metamodellgüte erreicht, kann die Konzeption des Metamodells in den Schritten Zielstellung, Parametrisierung, Sensitivitätsanalyse und Versuchsplan angepasst werden. Erfüllt das Metamodell weiterhin nicht die Gütekriterien, wird das Metamodell in der Konzeption verworfen, wodurch der Prozess in Abbildung 2.1 ebenfalls endet.

## 2.2. Entwicklungsschema für Multilevel-Metamodelle

Als Abstraktion des Prozesses zur Erstellung eines einfachen Metamodells aus Abbildung 2.1 und zur Integration einer Qualitätssicherung soll nun anhand eines allgemeinen Entwicklungsschemas für Modelle ein Entwicklungsschema für Multilevel-Metamodelle abgeleitet werden. Im Allgemeinen werden Modelle in einem Dualismus aus Erstellung und Qualitätssicherung erstellt, was Schlesinger [Sch79] in seinem Entwicklungsschema in Abbildung 2.2 veranschaulicht. Es wird in den Kontexten der verschiedenen Disziplinen verwendet und erweitert. Für die Mechanik kann hier der Leitfaden der American Society of Mechanical Engineers (ASME) [Ame06] genannt werden, die auf Schlesinger [Sch79], dem AIAA-Standard [Com98] und Oberkampf [OTH04] aufbaut. Hier wird die Verifikation untergliedert in Programmcode-Verifikation und Berechnungsverifikation, sowie eine starke Parallelität zwischen Simulationsmodellbildung und experimenteller Modellbildung vorgeschlagen.

Auf der Basis des ASME-Leitfadens und AIAA-Standards [Com98] kritisieren u.a. Oberkampf [OTH04], Refsgaard [RH04] Babuska [BO04] und Wille [Wil10] die Schwierigkeit, die Metriken der Validierung mit Schwellenwerten zu hinterlegen, da sie sehr anwendungsspezifisch sind. Somit müssen für die Bewertung der Modellgenauigkeit für jede Anwendung Gültigkeiten definiert werden, worauf in dieser Arbeit eingegangen wird.

## 2. Methodik zur Multilevel-Metamodellentwicklung

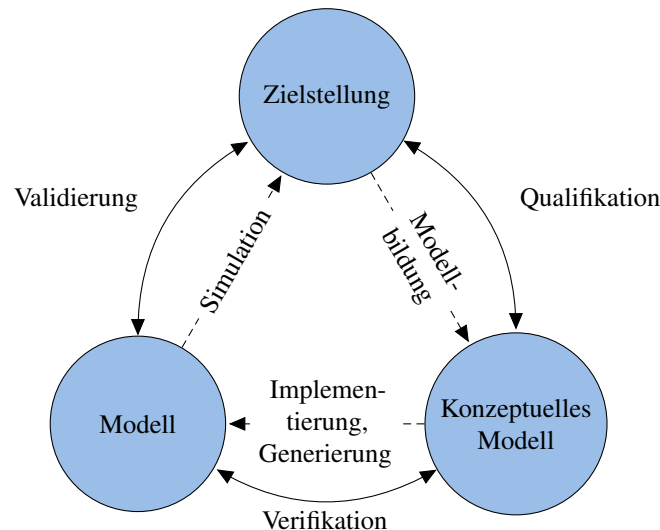


Abbildung 2.2.: Entwicklungsschema zur Modellerstellung und -absicherung nach Schlesinger [Sch79].

Für die Bildung von Modellen und Metamodellen wird im Rahmen dieser Arbeit das grundlegende Modell von Schlesinger herangezogen. Dieses in Abbildung 2.2 dargestellte Schema beinhaltet drei wesentliche Entitäten:

- Zielstellung: ist die Beschreibung des zu betrachtenden Problems
- Konzeptuelles Modell: ist die mathematische und konfigurative Modelldarstellung
- Modell: ist das für die Simulation fertig implementierte oder berechnete Verfahren

Mit den gestrichelten Pfeilen werden die Schritte zur Modellerstellung dargestellt, wohingegen die durchgezogenen Pfeile die qualitätssichernden Arbeitsschritte symbolisieren. So wird das konzeptuelle Modell durch die *Modellbildung* erstellt, indem die phänomenologisch wichtigen Effekte identifiziert, mathematisch modelliert und die dazu passenden Parameter und Gültigkeitsbereiche festgelegt werden. In der *Qualifikation* wird anschließend festgestellt, ob das konzeptuelle Modell prinzipiell zur Abbildung der gegebenen Zielstellung geeignet ist. Zur Erstellung des Modells wird das konzeptuelle Modell *implementiert bzw. generiert*. Diese Implementierung des Modells wird in der *Verifikation* dahingehend untersucht, ob die konzeptuelle Konfiguration des Modells wiedergegeben wird. Im letzten Schritt kann die zu beschreibende Zielstellung an gewünschten Ausprägungen des Systems *simuliert* werden. Diese Ergebnisse werden in der *Validierung* bewertet.

Auf dieser Ebene des Entwicklungsschemas sind die Erstellungsschritte und Qualitätssicherung von Metamodellen vergleichbar mit denen anderer Modelle. Daher kann das Modell und Metamodell in dem Entwicklungsschema in Beziehung gesetzt und Gemeinsamkeiten erar-

## 2. Methodik zur Multilevel-Metamodellentwicklung

beitet werden, was Abbildung 2.3 verdeutlicht. An die beschriebene Modellerstellung, die in der Bildhälfte oben rechts dargestellt ist, schließt sich die in der Bildhälfte unten links veranschaulichte Metamodellerstellung an. Die Zielstellung der Metamodellerstellung ist es, das ursprüngliche Modell möglichst gut abzubilden. Dem Schritt der *Modellbildung* in Abbildung 2.2 entspricht nun für das Metamodell der Schritt der *Metamodellkonfiguration und Stützpunkterstellung*. Zur Metamodellkonfiguration gehört die Auswahl und Konfiguration des Metamodelltyps sowie des Parameterraumes. Dieser Schritt ist damit äquivalent zu den Aufgaben „Parametrisierung“, „Sensitivitätsanalyse“, „Versuchsplanung“ und „Strukturanalyseverfahren“ aus Abbildung 2.1. Der Prozessschritt der *Implementierung* in Abbildung 2.2 ist für Metamodelle die *Modellschätzung*, also die Ermittlung geeigneter Gewichte der Metamodellformulierung, was dem „Erstellen des Metamodells“ aus Abbildung 2.1 entspricht. Mit dem erstellten Metamodell können beliebige *Stützstellen ausgewertet* und mit dem Modell validiert werden. Die *Qualifikation*, *Verifikation* und *Validierung* beantworten bei der Metamodellerstellung die gleichen Fragen wie bei der Erstellung des Ausgangsmodells. Die „Untersuchung der Metamodellgüte“ aus Abbildung 2.1 beinhaltet dabei sowohl die *Metamodellverifikation* als auch die *Metamodellvalidierung*. Die *Metamodellqualifikation* ist in dem Prozess aus Abbildung 2.1 nicht explizit enthalten. Sie wird in den Bereichen von „Zielstellung“ bis „Strukturanalyseverfahren“ implizit mit behandelt.

Somit verdeutlicht Abbildung 2.3 gleichartige Vorgehensweisen von Modellbildung und Metamodellbildung. Dennoch zeigt es die zusätzliche Abstraktionsschicht durch die Erstellung eines Modells über ein anderes Modell.

Für das gesamte Schema zur Entwicklung von Multilevel-Metamodellen muss die Modellerstellung aus Abbildung 2.3 zunächst für das Basismodell und Basismetamodell durchlaufen werden. Zusammen mit dem Zielmodell und Multilevel-Metamodell resultiert dies in vier Prozesszyklen der Modellerstellungen und Qualitätssicherungen, was in Abbildung 2.4 dargestellt ist. Auf der linken Seite befindet sich die Modellerstellung des Basismodells und des Basismetamodells nach dem gleichen Schema wie in Abbildung 2.3. Der Erstellungsprozess des Zielmodells befindet sich auf der rechten Seite. Beide Seiten teilen die gemeinsame Zielstellung der zu beschreibenden Größen. Das *konzeptuelle Basismodell* und das *konzeptuelle Zielmodell* basiert zwar auf derselben phänomenologischen Untersuchung, jedoch können die identifizierten Parameter und Modellansätze voneinander abweichen. Das *konzeptuelle Basismetamodell* und *konzeptuelle Multilevel-Metamodell* hingegen sollte bereits eine gewisse Konformität aufweisen. Beispielsweise sollten die verwendeten Parameter und Entwurfsraumgrenzen entweder stark überlappen oder übereinstimmen, um die Metamodelle im selben Betrachtungsraum analysieren zu können. Ist das Basismetamodell erzeugt und validiert, so kann es zur Erstel-

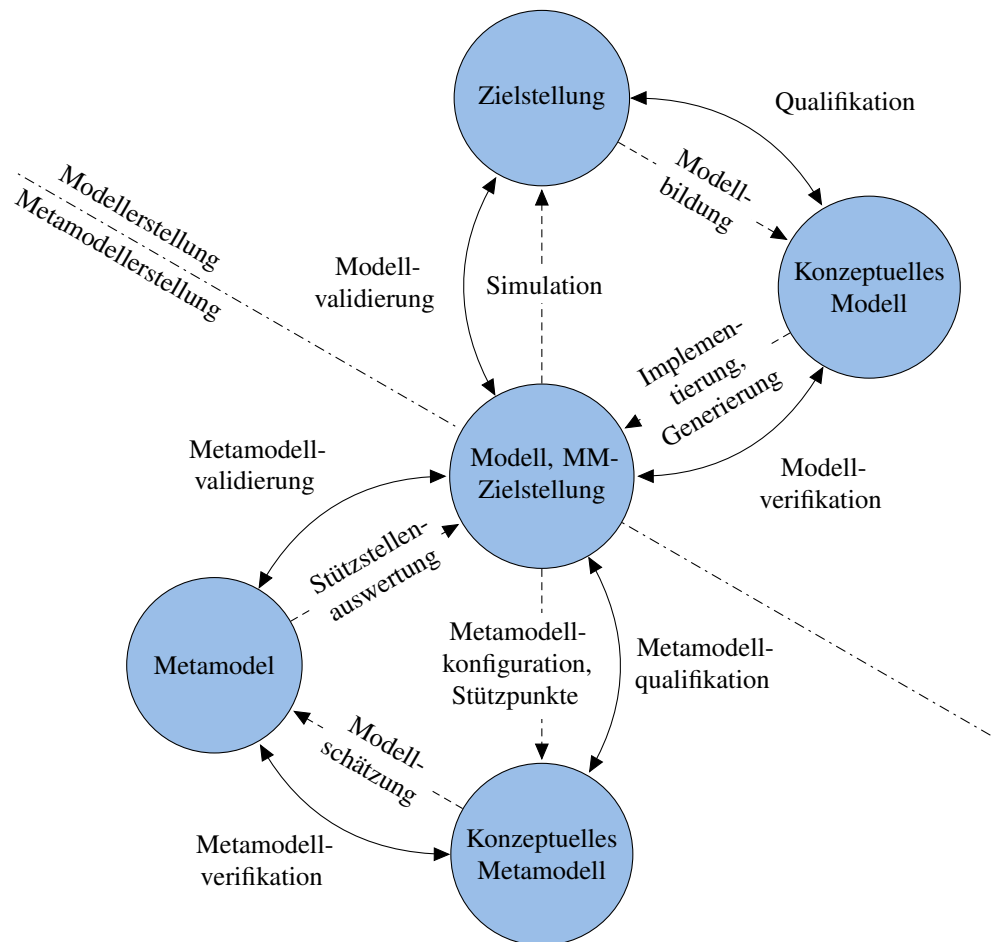


Abbildung 2.3.: Entwicklungsschema zur Modell- und Metamodellerstellung sowie Qualitätssicherung und ihre Beziehung zueinander

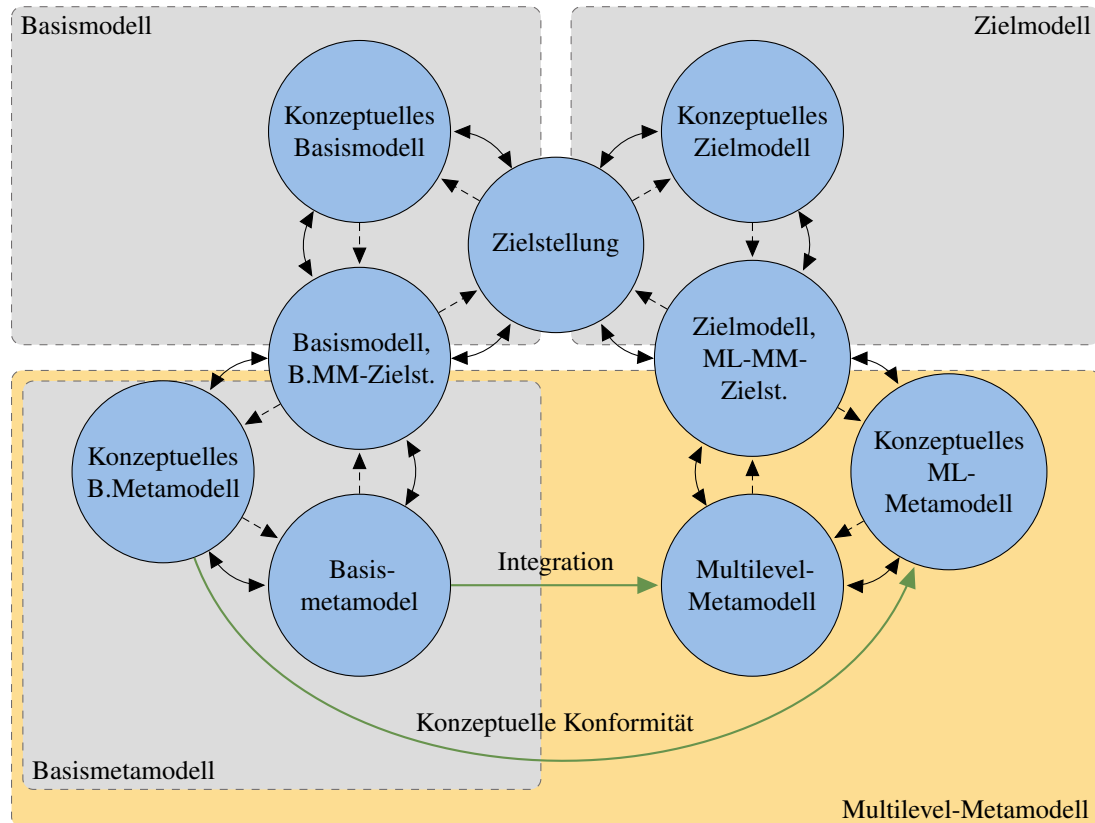


Abbildung 2.4.: Entwicklungsschema zur Erstellung und Qualitätssicherung von Multilevel-Metamodellen, das auf einem validierten Basismodell und Basismetamodell sowie auf einem validierten Zielmodell beruht.

lung des Multilevel-Metamodell genutzt werden.

Hiermit ist das Entwicklungsschema nach Schlesinger im Kontext der Multilevel-Metamodell- le erweitert, wodurch die bestimmenden Teilmodelle in Beziehung gesetzt sind.

### 2.3. Neuheitswert der Arbeit

Die Popularität der Verwendung von Metamodellen zur Abbildung von komplexen numerischen Simulationen ist seit den 1990er Jahren stark gestiegen und auf einem hohem Niveau, was Viana [VSBT14] anhand des Vorkommens von Design and Analysis of Computer experiments (DACE) in Publikationen abschätzt. Seit dem wurden verschiedenste Methoden vorgeschlagen, um Modelle unterschiedlicher Genauigkeit miteinander zu kombinieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Methode des hierarchischen Kriging von Han [HG12] verwendet, um damit die Bildung von Krigingmodellen über unterschiedlich genaue Stabilitätsanalyseverfahren

## 2. Methodik zur Multilevel-Metamodellentwicklung

ren von Leichtbaustrukturen, die im Luftfahrzeugbau verwendet werden, zu untersuchen.

Metamodelle über die Stabilitätsanalyse von versteiften Strukturen wurden hauptsächlich auf einem einzelnen Genauigkeitslevel erstellt. So beschreibt Kalnins [KR10] die Metamodellbildung für Nachbeulanalysen basierend auf genauen Modellen, die jedoch in einem sehr kleinen Parameterraum mit wenigen Stützstellen erstellt wurden, um den numerischen Kostenaufwand zu reduzieren. Vankan [VM10] verwendet Stabilitäts-Metamodelle auf dem Paneel-Level als unteres Level für eine Multi-Level-Optimierung. Bettebghor [BBG<sup>+</sup>11] beschreibt die Nutzung von mehreren Ersatzmodellen, die nur in bestimmten Regionen des Entwurfsraums gültig sind. So sollen Unstetigkeiten besser abgebildet werden können. Grihon [GAB<sup>+</sup>12] verwendet verschiedene Stabilitätsmethoden, die auf dem gleichen Genauigkeitslevel arbeiten und verschiedene Stabilitätsmoden repräsentieren.

Die Verwendung von mehreren Genauigkeitslevels wird in der Literatur unterschiedlich interpretiert. So kann nach Forrester [FSK08, Kap. 3.2.3] im Rahmen der Strategie der effizienten globalen Optimierung (engl. Efficient Global Optimization (EGO)) mit einem Metamodell ein Optimum erreicht werden, das dem des aufwändigen Zielmodells entspricht. Dies wird durch die adaptive Hinzunahme von Zielmodellstützpunkten an ausgewählten Stellen ermöglicht. Dieses Verfahren eignet sich nur eingeschränkt zur Ermittlung optimaler Paneelkonfigurationen bezüglich der Vielzahl von Belastungszuständen in einem Flugzeugentwurf, nicht für jeden Belastungszustand eine Vielzahl an neuen Stützpunkten erzeugt werden kann.

Bacarreza [BAA15] optimiert beispielsweise die Stabilitätseigenschaften versteifter Paneele mit künstlichen neuronalen Netzen und radialen Basisfunktionen. Hier ist der Multilevel-Kontext bezogen auf zwei Optimierungsschritte. Im ersten Schritt wird ein Paneel bezüglich seiner Geometrie und Robustheit und im zweiten Schritt bezüglich seiner Lasttragfähigkeit unter erweiterten Schadensbetrachtungen optimiert.

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein einfaches und ein aufwändiges Modell mit der gleichen Zielgröße zur Erstellung eines Multilevel-Metamodells verwendet werden.

Im Bereich mehrerer Genauigkeitslevels der gleichen Zielgröße führt Vitali [VHS98] eine quadratische Regression zwischen einem ungenauen und genauen Strukturmodell einer Raketenstufe mit Ringversteifung ein. Der verwendete Parameterraum spannt einen kleinen Wertebereich auf, was auf geringe Variationsgrenzen des Parameterraumes und einen vergleichsweise einfachen Verlauf der Antwortfunktion schließen lässt. Andererseits zeigt sich mit diesem Ansatz ein großes Potential. Für die in dieser Arbeit untersuchten axial versteifte Strukturen wird ein deutlich größerer Wertebereich erwartet.

Diese Arbeit untersucht die Verwendbarkeit und analysiert Vor- und Nachteile von Multilevel-



## *2. Methodik zur Multilevel-Metamodellentwicklung*

Metamodellen im Vergleich zu einfachen Krigingmodellen. Die Multilevel-Metamodelle entstehen auf einem umfangreichen Parameterraum, der einerseits die Analyse von Paneelen mit einer Vielzahl von Strukturausprägungen ermöglicht und andererseits eine Herausforderung für die Erstellung von Metamodellen mit geringem Fehler darstellt. Mit den ermöglichten Strukturausprägungen soll ein großes Spektrum an Schub- und Drucklasten ermöglicht werden. Als Bewertungskriterien sollen die Verbesserung der Metamodellgenauigkeit bzw. der Vorteil bei den Analysekosten durch die Verwendung von zwei unterschiedlich genauen Analysemodellen untersucht werden. Zusätzlich sollen Verbesserungspotentiale der Metamodelle für diesen Anwendungsfall identifiziert und genutzt werden. Mit dem Multilevel-Metamodell soll es prinzipiell ermöglicht werden erweiterte strukturmechanische Effekte zu berücksichtigen, die in einfacheren Modellannahmen nicht berücksichtigt werden.

# **3. Numerische Stabilitätsanalyse**

## **versteifter Paneele aus FVW**

Dieses Kapitel beschreibt die Methoden zur Stabilitätsanalyse, die in Abbildung 2.1 mit Strukturanalyseverfahren bezeichnet sind. Die Eigenschaften der Parameter und der Zielfunktionen sind ein zentraler Bestandteil, der vor jeder Anwendung von Metamodellen betrachtet und verglichen werden muss.

Als erstes werden die untersuchten Strukturen mit ihren geometrischen Parametern vorgestellt. Für diese Strukturen werden die Prinzipien der Materialmodellierung sowie das Phänomen Stabilität von Leichtbaustrukturen und deren numerische Analyse vorgestellt. Anschließend werden die beiden in dieser Arbeit verwendeten Analyseverfahren und ihre Eigenschaften betrachtet, welche darauffolgend verglichen werden.

### **3.1. Betrachtete Struktur**

#### **3.1.1. Strukturbeschreibung**

In dieser Arbeit werden gekrümmte Paneelstrukturen aus FVW, die aus einer Haut und rechtwinklig zueinander verlaufenden Versteifungen aufgebaut sind. Abbildung 3.1 veranschaulicht idealisiert die wichtigsten Bestandteile der betrachteten Strukturen für Paneele aus einem Flugzeugrumpf, Flügel bzw. Leitwerk. In Flugzeugrümpfen ist die Haut in axialer Richtung durch Stringer und in Umfangsrichtung durch Spante versteift. Die lastübertragende Struktur von Flügeln und Leitwerken ist der Flügel- bzw. Leitwerkskasten. Der Flügel- bzw. Leitwerkskasten wird in spannweitischer Richtung durch Stringer und in Strömungsrichtung durch Rippen versteift. Den Abschluss des Flügel- bzw. Leitwerkskastens bilden die Holme.

Die in die Hauptlastsrichtung verlaufenden Stringer können in verschiedenen Querschnittsgeometrien realisiert werden. So kann sich die Profilgeometrie der Stringer unterscheiden. Häufig verwendete Profilgeometrien sind T-, J-, Z- und  $\Omega$ -Stringer.

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

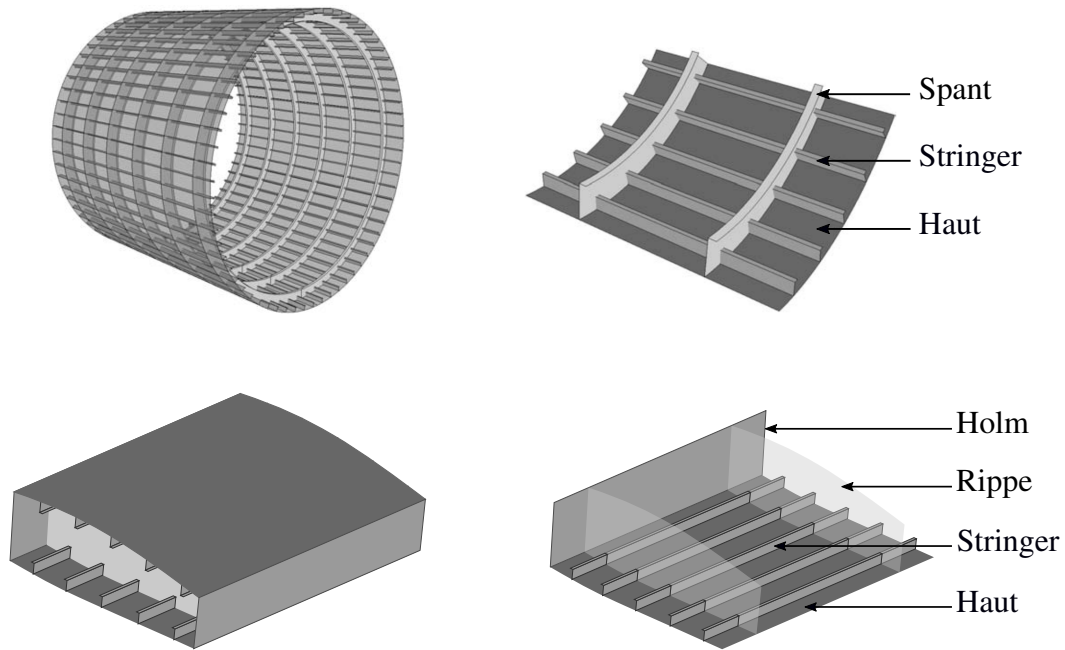


Abbildung 3.1.: Idealisierte Darstellung eines Flugzeugrumpftonne (oben links) und eines Ausschnittes davon (oben rechts) aus [Bü06] sowie eines Ausschnittes aus einem Flügel- bzw. Leitwerkskasten (unten links) und einer Veranschaulichung des Unterschalenpanels mit seinen Bestandteilen (unten rechts).



Abbildung 3.2.: Ausschnitt eines Rumpfpaneeles aus dem Projekt MAAXIMUS bestehend aus Haut, Spanten, Mouseholes, Stringern mit Duckfeets, Nieten, Klebschicht und Clips. [Her15]

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

Im Rahmen dieser Arbeit werden zur Untersuchung der Forschungshypothesen aus Abschnitt 1.3 als Versteifungsprofile T-Stringer bestehend aus Stringerfuß und Stringersteg verwendet. Sie eignen sie für die Bearbeitung der Hypothesen, da sie im Querschnitt aus wenigen Abschnitten bestehen. Die Verwendung von T-Stringern schließt auf der anderen Seite die prinzipielle Verwendbarkeit anderer Geometrien für Metamodelle nicht aus.

Die Strukturbestandteile erfüllen verschiedene Aufgaben. Die Haut sorgt für eine geschlossene Hülle und überträgt Zug-, Druck- und Schublasten in der Ebene. Zusätzlich überträgt sie Flächenlasten an die benachbarten Versteifungen.

In Richtung der größten Drucklasten verlaufen die Stringer, die die Haut in Hautabschnitte unterteilen. Sie haben im Vergleich zu Spanten bzw. Rippen einen geringeren Abstand zueinander und weisen eine geringere Höhe und Biegesteifigkeit auf. Damit haben sie einen großen Einfluss auf die Stabilitätseigenschaften der Struktur.

Die Spante im Rumpf und Rippen im Flügel stellen die radiale Konturtreue sicher und unterteilen das freie Hautfeld in Längsrichtung.

Die Beuleigenschaften des Panels sind von der geometrischen Ausprägung und den Materialkennwerten seiner Bestandteile abhängig.

#### 3.1.2. Referenzpaneel

Für die Betrachtung der folgenden Analyseverfahren wird ein mit T-Stringern versteiftes Referenzpaneel vorgestellt. Wilckens [Wil16] beschreibt für dieses Paneel die Ergebnisse von Strukturtests. Damit ist das Stabilitätsverhalten dieses Panels unter Testbedingungen bekannt. In Tabelle 3.1 sind die Kenngrößen des Panels dargestellt und Abbildung 3.3 verdeutlicht den schematischen Aufbau im Querschnitt mit seinen geometrischen Kenngrößen. Das Paneel wurde mit dem Forschungsziel ausgelegt, das Strukturverhalten im Nachbeulbereich (wird in Unterabschnitt 3.3.2 beschrieben) zu untersuchen. Dafür ist es im Vergleich zu aktuellen Transportflugzeugen mit geringer Hautdicke und großem Stringerabstand entworfen worden, was zu einer geringen ersten Beullast im Vergleich zur Versagenslast führt. Falls nicht anders angegeben, wird für Studien dieses Paneel mit seinen Kenngrößen als Nominalwerte verwendet.

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

Parameter Name	Formelzeichen	Nominalwert
Paneelradius	$r_y$	$2.075m$
Spantabstand	$a$	$0.584m$
Stringerabstand	$b$	$0.2m$
Stringerfußbreite	$b_F$	$0.056m$
Stringerhöhe	$b_S$	$0.032m$
Lagendicke	$t_L$	$0.000125m$
Stringerfußdicke	$t_F$	$0.001375m$
Lagenaufbau Fuß		$[45, -45, 0, 0, 90, 0, 90, 0, 0, -45, 45]$
Lagenaufbau Steg		$[45, -45, 0, 0, 90, 0, 90, 0, 0, -45, 45, 0, 0]_S$
Stringerkerndicke $0^\circ$	$t_K$	$0.0005m$
Lagenaufbau Haut		$[45, -45, 90, 0, 45, 90, -45, 0, 90, -45, 45]$
Hautdicke	$t_H$	$0.001375m$
Elastizitätsmodul L	$E_{11}$	$147e9N/m^2$
Elastizitätsmodul T	$E_{22}$	$8.5e9N/m^2$
Schubmodul	$G_{12}$	$5.1e9N/m^2$
Querkontraktionszahl	$\nu$	$0.33$

Tabelle 3.1.: Kenngrößen des Referenzpaneels

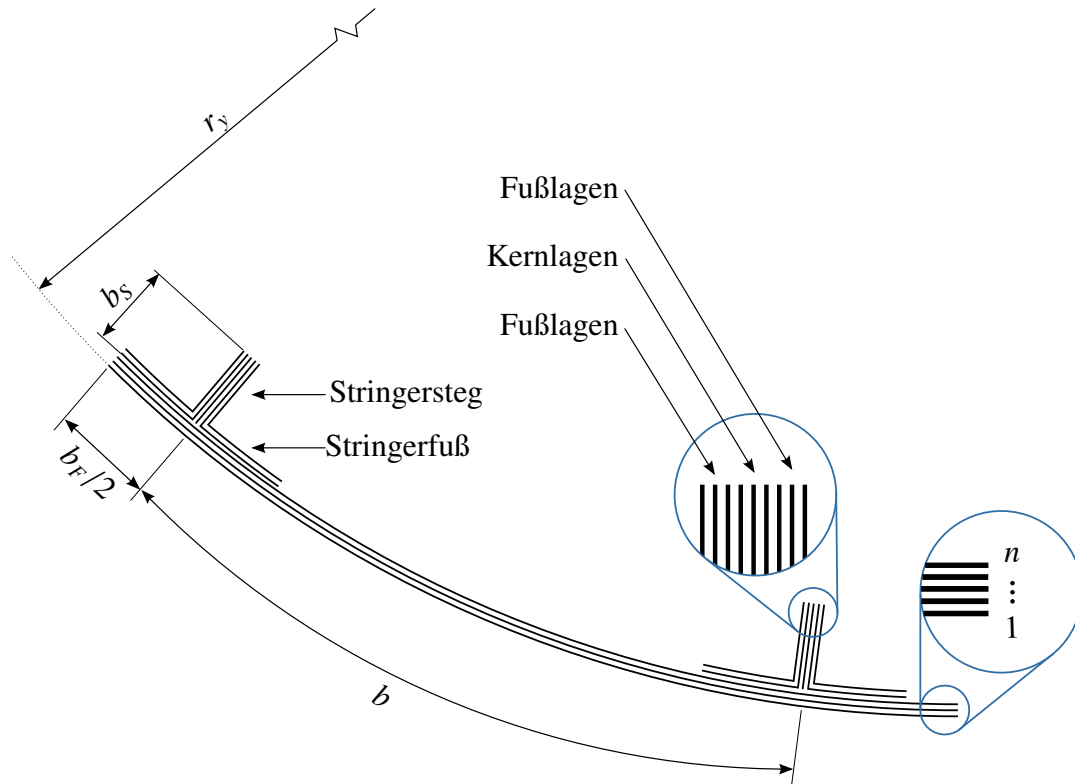


Abbildung 3.3.: Geometrische Größen eines Paneels

## 3.2. Materialmodellierung von Schichtverbunden

Die Modellierung von Schichtverbunden ist in den Standardwerken über Faserverbundstrukturen beispielsweise von Jones [Jon98], Reddy [Red04], Herakovich [Her88], Tsai [Tsa92] und Altenbach [AAR96] dargelegt. Dort sind die wichtigen Aspekte des mikro- und makromechanischen Verhaltens von Einzellagen wie beispielsweise Materialcharakterisierung, Steifigkeit, Festigkeit sowie Spannungs-Dehnungs-Beziehungen beschrieben. Weiterhin ist das makromechanische Verhalten von Schichtverbunden bezüglich Verformung und Festigkeit sowie das Stabilitätsverhalten von Platten aus Schichtverbunden mit unterschiedlichen Lagerungsbedingungen enthalten.

In diesem Kapitel und in Kapitel 6 wird die klassische Laminattheorie verwendet und daher hier beschrieben.

Für das Materialverhalten einer Laminatschicht des Schichtverbundes wird ausgehend vom ebenen Spannungszustand die konstitutive Gleichung mithilfe der Scheibensteifigkeitsmatrix  $Q$  im Materialkoordinatensystem über

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

aufgestellt. Die Werte für  $Q_{ij}$  können über die Ingenieurskonstanten, welche aus Materialcharakterisierungen stammen, ermittelt werden. Durch eine Transformation der Spannungen und Dehnungen vom Materialkoordinatensystem in das Laminatkoordinatensystem ergibt sich die transformierte Scheibensteifigkeitsmatrix zu

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{Q}_{11} & \check{Q}_{12} & \check{Q}_{16} \\ \check{Q}_{12} & \check{Q}_{22} & \check{Q}_{26} \\ \check{Q}_{16} & \check{Q}_{26} & \check{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

und in der Kurzform

$$\sigma = \check{Q}\varepsilon \quad (3.3)$$

Für das gesamte Laminat werden nun Annahmen getroffen, die der Kirchhoff-Theorie für Platten bzw. der Kirchhoff-Love-Theorie [Lov88] für Schalen entsprechen, viz.:

- Das Materialverhalten ist linear elastisch.
- Die Einzelschichten sind makroskopisch homogen und orthotrop.
- Es sind keine Delaminationen vorhanden.
- Die Klebungen sind infinitesimal klein.
- Es treten nur Schubspannungen in der Ebene auf ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ).
- Es besteht ein ebener Spannungszustand im Laminat (zusätzlich  $\sigma_z = 0$ ).

Die Annahmen des ebenen Spannungszustandes gelten für schlanke Platten und Schalen, was in vielen Veröffentlichungen untersucht wurde. Beispielsweise untersucht und diskutiert Geier [GR89] die klassische Laminattheorie sowie Theorien höherer Ordnung. Hierbei kommt er in seinem Beispiel zu dem Schluss, dass für eine gelenkig gelagerte Platte ab einem Schlankheitsgrad von  $b/t_H < 25$  die Fehler im Vergleich zu einer dreidimensionalen Analyse 5% überschreiten. Typische Paneelkonfigurationen von Transportflugzeugen weisen deutlich höhere Schlankheitsgrade als 25 auf. Daher ist die Theorie nach Kirchhoff-Love anwendbar. Analoge Betrachtungen gibt es in der Balkentheorie, die in Kapitel 5 behandelt wird.

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

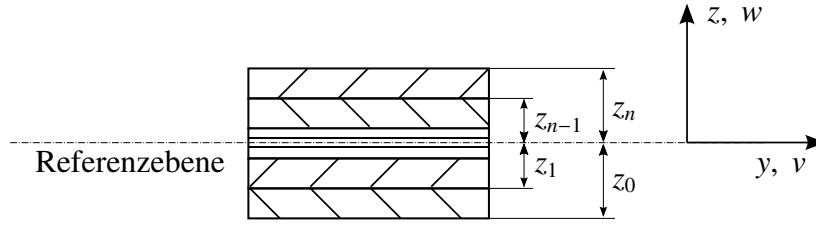


Abbildung 3.4.: Veranschaulichung der Koordinaten eines Laminates

Abbildung 3.4 zeigt ein beispielhaftes Laminat mit seinen  $n$  Schichten und den dazugehörigen Koordinaten  $z_0$  bis  $z_n$ , sowie der Referenzebene. Zur Modellierung des gesamten Laminates ergibt sich mit dem schichtweisen Materialgesetz und aus der Betrachtung der Membrankräfte und Momente

$$\begin{aligned} N &= \int_{z_0}^{z_n} \sigma dz = \int_{z_0}^{z_n} \check{Q}(z) \varepsilon dz + \int_{z_0}^{z_n} \check{Q}(z) z \kappa dz \\ &= A \cdot \varepsilon^0 + B \cdot \kappa \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} M &= \int_{z_0}^{z_n} \sigma \cdot z dz = \int_{z_0}^{z_n} \check{Q}(z) z \varepsilon dz + \int_{z_0}^{z_n} \check{Q}(z) z^2 \kappa dz \\ &= B \cdot \varepsilon^0 + D \cdot \kappa \end{aligned} \quad (3.5)$$

wird die Verbindung zwischen Last und Dehnung hergestellt, die als ABD-Matrix

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

zusammengefasst wird. Hierbei ist die MembranstEIFigkeit  $A$

$$A = \sum_{k=1}^{n_z} \check{Q}_k \cdot t_k, \quad (3.7)$$

die Koppelsteifigkeit  $B$

$$B = \sum_{k=1}^{n_z} \check{Q}_k \cdot t_k \cdot \left( z_k - \frac{t_k}{2} \right) \quad (3.8)$$



und die Biegesteifigkeit

$$D = \sum_{k=1}^{n_z} \check{Q}_k \cdot t_k \cdot \left( \frac{t_k^2}{12} + \left( z_k - \frac{t_k}{2} \right)^2 \right) \quad (3.9)$$

mit der Schichtanzahl  $n_z$ , der jeweiligen Schichtdicke  $t_k$ , den Koordinaten  $z_k$  aus Abbildung 3.4. Die Nachgiebigkeit des Laminates lässt sich durch Invertierung der ABD-Matrix

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ (B')^T & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ermitteln.

### 3.3. Stabilitätsanalyse eines Paneels unter mehrachsiger Belastung

In diesem Abschnitt soll das Stabilitätsverhalten versteifter FVW-Paneele hinsichtlich ihrer Phänomenologie betrachtet und die für diese Arbeit wichtigen Lösungsverfahren und den Entwurfsgrundlagen dargelegt werden.

#### 3.3.1. Literatur zur Stabilität von Paneelen unter mehrachsiger Belastung

Das Stabilitätsverhalten von dünnwandigen Strukturen wird bereits lange untersucht. Als früher Vertreter von Stabilitätsuntersuchungen hat sich z.B. Euler mit den Euler'schen Knickfällen [Eul44] befasst.

Im experimentellen Bereich existieren viele Arbeiten, von denen „Buckling Experiments“ von Singers in [SAW97] und in [SAW02] als Übersichtswerk betrachtet werden kann.

Für die theoretische Analyse des Stabilitätsverhaltens existieren u.a. analytische bzw. geschlossene Lösungen, die in der Regel auf einem für das gesamte Gebiet definierten Verschiebungs-

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

ansatz basieren und so gewählt sind, dass sie die erwarteten Beulverformungen näherungsweise abbilden. Unter Berücksichtigung der Modellannahme einer verschiebungsunabhängigen, konstanten Steifigkeit zur Ermittlung der Beullast werden für viele verschiedene Strukturen beispielsweise von Wiedemann [Wie07] beschrieben. Mittelstedt [Mit11] und Beerhorst [Bee13] beschreiben unter anderem Methoden zur Beulanalyse langer Platten mit offenprofiligen Längsstreifen als Stringer aus FVW. Byklum [BSA04], Bürmann [BRTS06] und Wilckens [Wil19] beschreiben mithilfe des Ritz-Verfahrens auch das nichtlineare Nachbeulverhalten für versteifte Schalen, wobei die Steifigkeitsmatrix mit steigender Last iterativ angepasst wird. Damit können Aussagen über das Stabilitätsverhalten bei Beullastüberschreitung getroffen werden.

Die Finite Elemente Methode (FEM) hat die Möglichkeiten der numerischen Simulationen stark erweitert, was in den Standardwerken von beispielsweise Zienkiewicz [ZTT00], Bathe [Bat01] und Wriggers [Wri01] beschrieben ist. Durch die abschnittsweise Definition der Verschiebungsansätze in der FEM können Modelle mit einer hohen Flexibilität (z.B. Randbedingungen, Kontaktbedingungen, Materialmodelle und Geometrie) erstellt werden, die Versuchsergebnisse mit mehrfacher Beullastüberschreitung gut nachbilden können. Als Beispiel vergleicht Degenhardt [DRW<sup>+</sup>04] verschiedene FEM-Programme und Lösungsansätze; Zimmermann [ZKK06] verwendet künstliche Dämpfung des mechanischen Systems und betont die Wichtigkeit der Randbedingungen. Für Validierungen von Experimenten modelliert Linde [LSR06] die mechanische Charakteristik der Testanlage, um die Randbedingungen des Paneels zu verbessern und die Versuchsrandbedingungen im Modell zu berücksichtigen.

#### 3.3.2. Phänomenologie von Stabilitätsproblemen

Die geometrischen Abmessungen von Leichtbaustrukturen sind generell in mindestens einer Raumrichtung groß im Vergleich zur den anderen Raumrichtungen. Wie Bushnell [Bus81] verdeutlicht, ist damit die MembranstEIFigkeit um Größenordnungen höher als die Biegesteifigkeit. Bei Druck- oder Schubbelastung können solche Strukturen sehr viel potentielle Energie bei relativ geringer Verformung in der Membranebene aufnehmen. Bei steigender Last wird die Stabilitätsgrenze erreicht, bei der die Struktur seitlich zur Belastung ausweicht. Durch die geringe Biegesteifigkeit tritt hierbei eine sehr große Verformung auf, um die Umwandlung der potentiellen Energie zu ermöglichen. Dieses seitliche Ausweichen tritt sehr plötzlich auf und kann zum Strukturversagen führen. Für Stäbe und Balken unter Druckbeanspruchung wird dies als Knicken und für Platten und Schalen als Beulen bezeichnet.

Abbildung 3.5 aus der Richtlinie [VDI06] beschreibt mögliche Last-Stauchungspfade dünn-

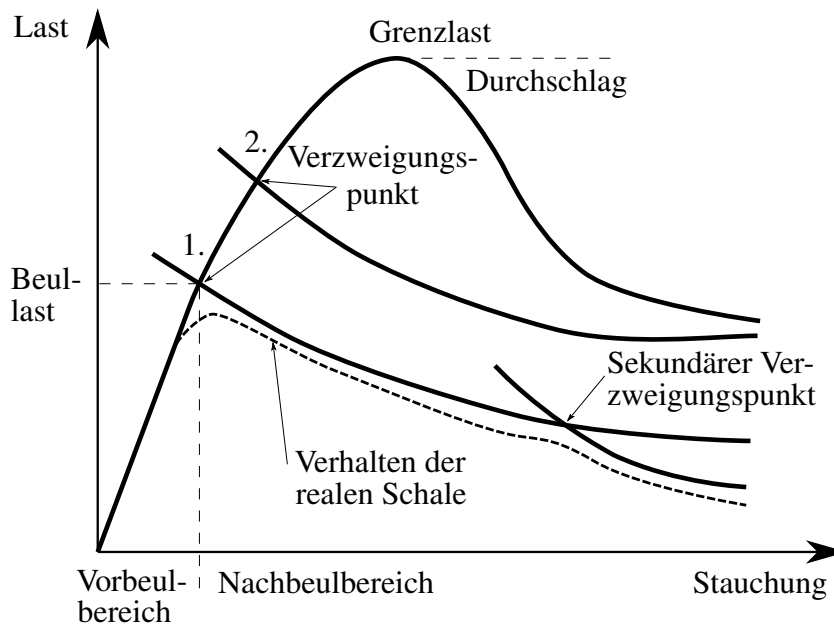


Abbildung 3.5.: Qualitative Darstellung des Beulverhaltens dünnwandiger Schalen mit Beul-lastüberschreitung [VDI06]

wandiger Schalen unter axialer Drucklast. Die Kurve steigt von Null beginnend zunächst linear an und beschreibt den Grundzustand der Struktur.

Es können Verzweigungspunkte existieren, die durch Nachbarzustände neben dem Grundzustand gekennzeichnet sind. Diese Nachbarzustände weisen deutlich größere Verschiebungen senkrecht zur Belastungsrichtung auf. Die Form des Nachbarzustandes nennt man Beulform und die Last am Verzweigungspunkt mit der niedrigsten Stauchung ist die Beullast. Bis dahin spricht man vom Vorbeulbereich und nach dem Verzweigungspunkt vom Nachbeulbereich. Entlang des Nachbeulpfades können auch weitere sekundäre Verzweigungspunkte auftreten, die wiederum andere Beulformen aufweisen können.

Manche Strukturen weisen keine Verzweigungspunkte unterhalb der Grenzlast auf. Dabei führt ein Überschreiten der Grenzlast zum Durchschlagen in eine Gleichgewichtslage mit großen seitlichen Verschiebungen.

Diese Betrachtung des Beul- und Nachbeulverhaltens trifft für ideale Strukturen zu. In der Realität unterliegt das Gesamtsystem Imperfektionen, die durch – meist geometrische – Fertigungsabweichungen der Struktur oder nicht ideale Lasten hervorgerufen werden können. Somit reduzieren sich bei realen Strukturen die Lasten der Last-Stauchungskurve und mindern die Traglast. Dies wird durch die gestrichelte Linie verdeutlicht. Ein instabiles Verhalten am Verzweigungspunkt zeigen beispielsweise ebene Platten. Hier fällt die Lasttragfähigkeit im Nachbeulbereich ab, was Abbildung 3.6 veranschaulicht.

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

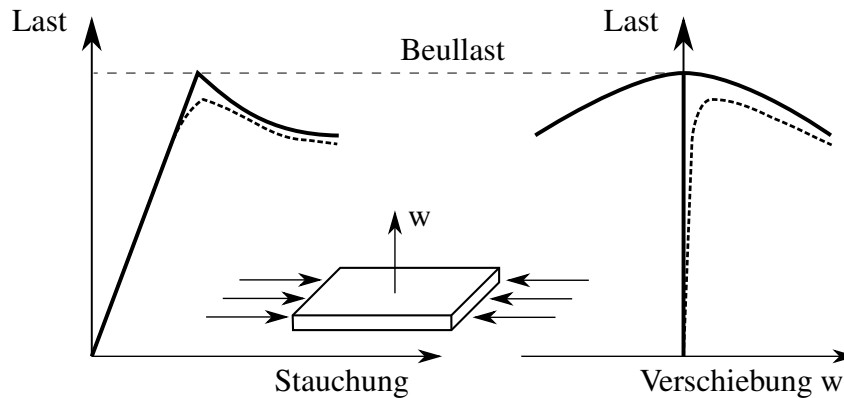


Abbildung 3.6.: Veranschaulichung eines instabilen Stabilitätsverhaltens [VDI06]

Um einerseits das Verhältnis von Beullast und Gewicht zu verbessern und andererseits ein stabiles Verhalten am Verzweigungspunkt zu erzeugen, werden die im Flugzeugbau verwendeten Leichtbaustrukturen versteift. Damit reduzieren sich die Beulfeldabmessungen, was höhere Beullasten des Hautfeldes ermöglicht. Zusätzlich erhält das Hautfeld über die Torsionssteifigkeit der Versteifung eine elastische Lagerung, deren Betrag zwischen gelenkiger Lagerung und fest eingespannt ist. Weiterhin hat der Stringerfuß ebenso eine zusätzliche stabilisierende Wirkung auf das Hautfeld. Der wichtigste Effekt ist jedoch die Möglichkeit die Last vom ausbeulenden Hautfeld auf die Versteifungen umzulagern. Vorausgesetzt sind jedoch ausreichende Biegesteifigkeiten der Versteifungen, um ein Ausknicken von Haut und Versteifung vor dem Erreichen der Hautfeldbeullast zu verhindern. Solche versteiften Paneele zeigen hauptsächlich die drei Stabilitätsmodi

1. Hautfeldbeulen,
2. lokales Versteifungsbeulen und
3. Globales Beulen (oder auch globales Beulen),

die zusätzlich miteinander interagieren. Paneele werden nach Zimmermann [ZKK06] und nach Kling [Kli10] so entworfen, dass sie als erstes Hautfeldbeulen aufweisen. Mit dem Ausbeulen der Haut unter axialer Belastung soll eine Lastumlagerung von der Haut den Stringern und der noch mittragenden Hautbreite (siehe Marguerre [Mar37] und Wiedemann [Wie07]) einhergehen. Es erfolgt eine Steifigkeitsreduktion des Panels, was in Abbildung 3.7 idealisiert im Last-Verschiebungsverhalten zwischen 1. und 2. erkennbar ist.

Mit weiterer Laststeigerung können sekundäre Verzweigungspunkte wie in Abbildung 3.7 2. auftreten, die schließlich ein lokales Versteifungsbeulen oder globales Beulen zu Folge haben können. Dabei wird die Steifigkeit soweit reduziert bis das Strukturversagen in 4. eintritt. Ebenso tritt in der Regel in so einem Fall im Nachbeulbereich Materialdegradation (3.) auf.

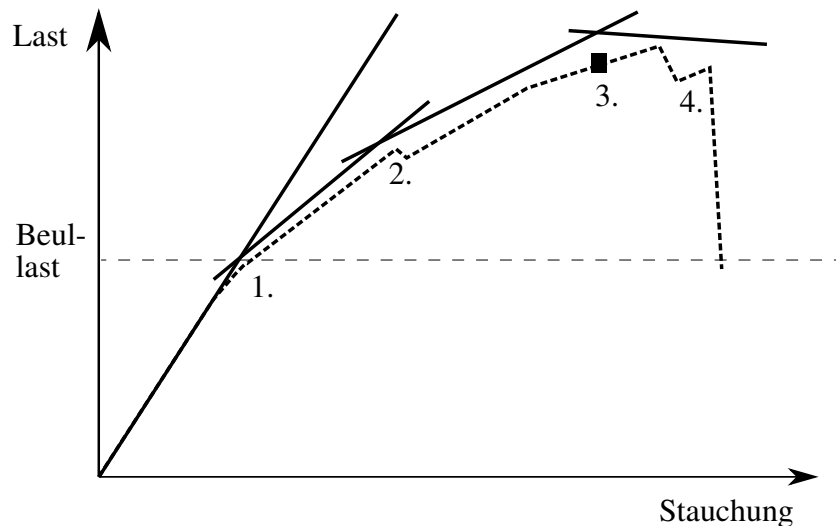


Abbildung 3.7.: Qualitatives Last-Verschiebungsverhalten einer gekrümmten versteiften Schale unter axialer Drucklast (nach Arbocz [AB10])

### 3.3.3. Lineare Stabilitätsanalyse

In dieser Arbeit wird die lineare Stabilitätsanalyse verwendet. Sie ist ein Verfahren für Stabilitätsphänomene, für deren Vorbeulbereich ein lineares Last-Stauchungsverhalten angenommen wird und somit die Steifigkeitsmatrix konstant ist.

Ein Vorteil dieser Methode ist, dass durch das Lösungsverfahren ein Skalar für die erste Beul-last errechnet wird. Im Gegensatz dazu müssen bei nichtlinearen Verfahren die kritischen Lasten durch ein robustes, im gesamten Parameterraum gültiges Kriterium ermittelt werden.

Die lineare Stabilitätsanalyse gehört nach Wriggers [Wri01] zu den weit verbreiteten Nachweisverfahren, was detailreicher von Pflüger [Pfl13], Geier [Gei72] und Rohwer [Roh76] dargestellt wird. Sie liefert eine Näherung des ersten Instabilitätspunkts einer Struktur, der in den meisten Anwendungen als obere Auslegungsgrenze ausreichend ist.

Für diese Methode betrachtet man das Energiefunktional  $\Pi$ , das die potentielle Energie der Struktur beschreibt. Hierbei wird von einem stabilen Grundzustand der Struktur ausgegangen, welcher durch seine Verschiebungen  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$ , sowie seinen Lasten  $\tilde{N}$  beschrieben ist und sich im Gleichgewicht befindet.

Eine Änderung dieses Zustandes durch Variation der Verschiebungen liefert

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} + \delta u \\ \tilde{v} + \delta v \\ \tilde{w} + \delta w \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

und damit eine Änderung des Potentials

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi + \frac{1}{6}\delta^3\Pi + \dots \quad (3.12)$$

Die erste Variation des Potentials besteht aus allen Beiträgen, die linear in den Verschiebungsvariationen sind, und ihrer Ableitungen. Die zweite Variation enthält alle Produkte aus zwei Termen und so weiter. Ein Gleichgewichtszustand ist dadurch gekennzeichnet, dass seine erste Variation des Potentials verschwindet

$$\delta\Pi = 0. \quad (3.13)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so zeigt die zweite Variation des Potentials ob der Gleichgewichtszustand stabil ist, wenn

$$\delta^2\Pi > 0, \quad (3.14)$$

Pflüger [Pfl13] beschreibt demnach einen instabilen Zustand:

Ein elastisches System erreicht seine Stabilitätsgrenze, wenn die zweite Variation der gesamten potentiellen Energie nicht mehr positiv definit ist. Im Verzweigungspunkt muss die zweite Variation des Gesamtpotentials einen stationären Wert besitzen. Dort gilt:

$$\delta(\delta^2\Pi) = 0. \quad (3.15)$$

Zur Lösung dieses Variationsproblems muss das Funktional  $\delta^2\Pi$  aufgestellt werden. Im ersten Schritt kann das Energiefunktional  $\Pi$  aus dem inneren Potential - der Formänderungsenergie -  $\Pi_i$  und dem Potential der äußeren Lasten  $\Pi_a$  aufgestellt werden. Von den Kraftgrößen des Grundzustandes wird angenommen, dass sie linear mit der Verschiebung über ein Lastniveau  $\lambda$  ansteigen. Durch die Modellierung von Verschiebungsfunktionen folgt für das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned}\delta(\delta^2\Pi) &= 0 \\ Kx - \lambda K_g x &= 0 \\ (K - \lambda K_g)x &= 0\end{aligned}\tag{3.16}$$

Dabei beschreibt  $K$  die Steifigkeitsmatrix,  $K_g$  die geometrische Steifigkeitsmatrix und  $x$  den Vektor der unbekannten Verschiebungen. Mit dem Lösen des Gleichungssystems ist  $\lambda$  das Lastniveau, bei der die zweite Variation des Gesamtpotentials einen stationären Wert erreicht. Dieses Lastniveau wird zusammen mit der Vorlast des Grundzustandes als Beullast interpretiert. Die Koeffizienten der Verschiebungsvariationen  $x$  liefern die Eigenform, jedoch nicht deren Verschiebung.

In dieser Arbeit werden zwei auf der FEM basierende Programme verwendet. Dabei werden die Verschiebungsvariationen näherungsweise durch abschnittsweise definierte Verschiebungsansatzfunktionen modelliert.

Es existieren effiziente Lösungsverfahren für solche Eigenwertprobleme aus Gleichung 3.16. In beiden verwendeten FEM-Systemen wird die inverse simultane Vektoriteration zur Lösung verwendet. Sie ist beispielsweise in Dahmen [DR08] beschrieben.

#### 3.3.4. Auslegungskriterien im Flugzeugentwurf

Die EASA definiert in der CS-25 [Eur12, 25.301-25.305] als wichtigste regulatorische Randbedingung die Limit Load (erlaubte Last) (LL) als die Last, die eine Struktur in der Lage sein muss ohne nachteilige, bleibende Verformung für alle erlaubten Flugzustände zu übertragen. Weiterhin ist die Ultimate Load (Versagenslast) (UL) die Last, die eine Struktur für drei Sekunden ohne Versagen ertragen muss. Zwischen LL und UL ist ein Sicherheitsfaktor von 1.5 definiert.

Die Beullast ist ein charakteristischer Punkt im Entwurf, was für Strukturbereiche ohne sichere Lastumlagerung bis UL nachgewiesen werden muss. Wie in Unterabschnitt 3.3.2 beschrieben, findet beim Hautfeldbeulen dünnwandiger versteifter Paneele eine Lastumlagerung unter reiner elastischer Verformung statt. Somit ist dies unterhalb von UL erlaubt, wenn die umgelagerten Lasten von den Versteifungen und dem mittragenden Hautanteil übertragen werden kann.

Da Metamodelle eine Approximation eines Modells darstellen, können Beullasten sowohl über- als auch unterschätzt werden. Das Unterschätzen der Beullasten verschlechtert das auf

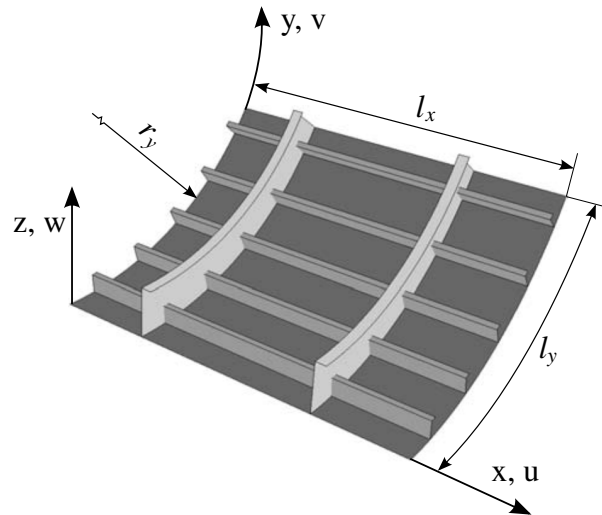


Abbildung 3.8.: Koordinatensystem des verwendeten Stabilitätsanalyseprogramms

dem Metamodell basierende Strukturoptimum im Vergleich zum Optimum, welches mit dem Zielmodell gefunden wird. Ein Überschätzen der Beullast kann zu einem ungültigen Entwurf führen. Daraus folgt, dass Metamodelle nicht alleinig für einen Strukturnachweis geeignet sind.

Ein Metamodell kann also für Optimierungen, Vorentwürfe und Auslegungen verwendet werden, wenn mindestens der finale Entwurf mit einem zertifizierten Modell und einem Strukturtest bestätigt wird.

## 3.4. Lineare Stabilitätsanalyse mit grob diskretisiertem Modell

In diesem Abschnitt wird ein FEM-Modell für die lineare Stabilitätsanalyse vorgestellt, welches durch Ansatzfunktionen höheren Grades eine grobe Diskretisierung ermöglicht. Diese Ansatzfunktionen sind besonders für die Beschreibung der beim Beulen auftretenden Verschiebungen geeignet. Das hier verwendete Programm Buckling of Eccentrically Orthotropic Shells (BEOS) ist eine Eigenentwicklung des Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) und basiert auf den Arbeiten von Geier [Gei72], Rohwer [Roh76] und Schillo [Sch08].



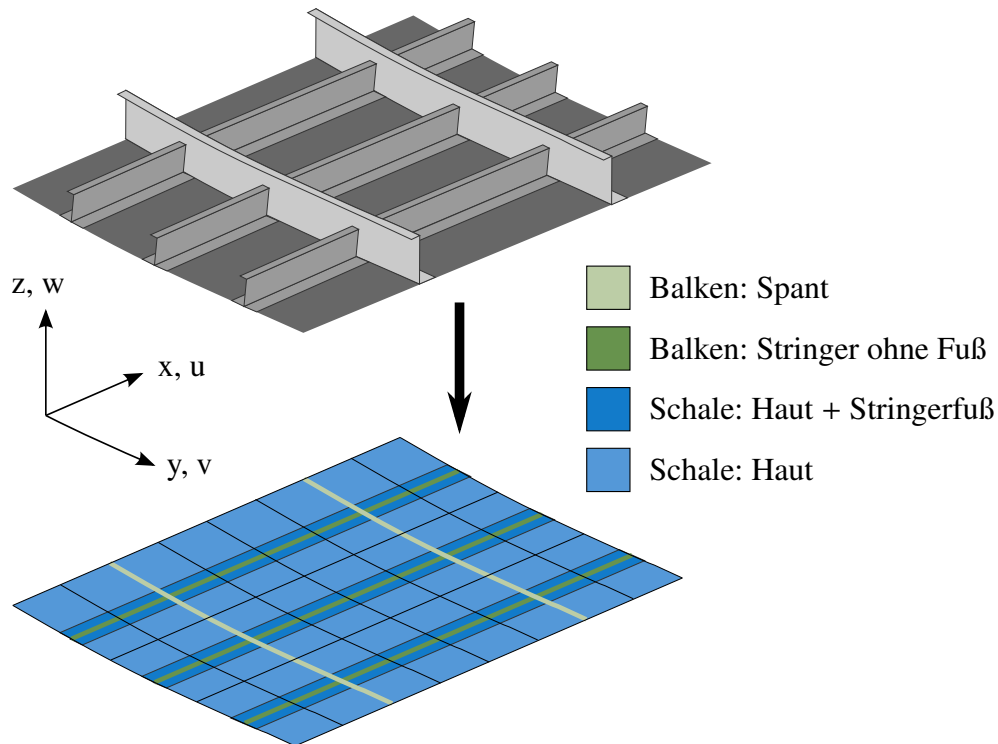


Abbildung 3.9.: Veranschaulichung des verwendeten Strukturmodells

#### 3.4.1. Möglichkeiten und Beschränkungen des Strukturaufbaus in BEOS

Eine repräsentative Geometrie und ihr Koordinatensystem ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die betrachteten Strukturen sind beschränkt auf parallelogramm-förmige Planformen und können in die beiden Membranrichtungen jeweils einen konstanten Krümmungsradius aufweisen. Eine mögliche Bauweise ist die Verwendung eines querschubweichen Sandwichkerns, der von zwei querschubstarken Decklaminaten eingeschlossen ist. In dieser Arbeit wird diese Variante nicht weiter betrachtet. Die andere und weiterführend beschriebene Variante ist die Verwendung eines Laminates mit diskreten Versteifungen. Diese Versteifungen müssen parallel zu den Rändern verlaufen. Die Stringer und Spante werden jeweils mit konstanter Längs-, Biege- und Torsionssteifigkeit betrachtet. Im Vergleich zu den Kantenlängen  $l_x$  und  $l_y$  muss die Schalendicke klein sein, da die Schalentheorie nach Kirchhoff-Love [Lov88] verwendet wird.

#### 3.4.2. Modellaufbau

Das versteifte Hautfeld stellt einen Ausschnitt einer realen Flugzeugstruktur (siehe Abbildung 3.1) mit repräsentativen Belastungen dar. Als Idealisierung werden im verwendeten Mo-

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

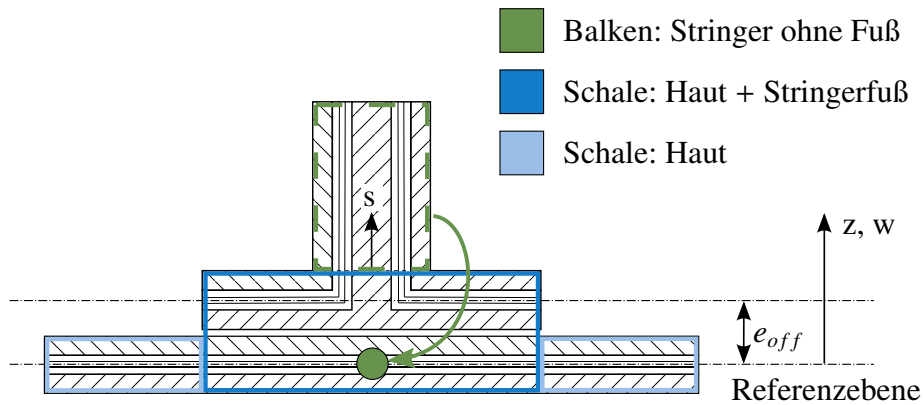


Abbildung 3.10.: Referenzebene in BEOS

dell die Belastungen der modellierten Elemente als konstant und gleich angenommen. Es werden mehrere Hautfelder in  $x$ - und  $y$ -Richtung berücksichtigt, um den Abstand zwischen den an den Paneelekanten befindlichen Randbedingungen zu dem zentralen Hautfeld zu erhöhen. Durch das Abklingen der Randbedingungseffekte stellen sich damit realistischere Beullasten und Beulmuster in den inneren Hautfeldern ein.

Abbildung 3.9 veranschaulicht die Modellabstraktion der Struktur. Diese ist durch randparallele Linien in einzelne Elemente unterteilt, welche als Schalenelemente behandelt werden. Hierbei kann jeder Elementstreifen in axialer Richtung unterschiedliche Steifigkeiten aufweisen. Damit können die Steifigkeiten der Stringerfüße, die eine Stützwirkung auf die Haut ausüben, mit der darunter liegenden Haut gemeinsam in die Schalenformulierung integriert werden. In der Abbildung 3.9 ist dies durch die unterschiedlichen Blautöne gekennzeichnet. Die grünen Linien symbolisieren die Balken, wobei in hellgrün Spante und in dunkelgrün Stringer ohne Stringerfuß dargestellt sind.

Die Verteilung der Strukturbestandteile auf die Elemente ist für einen Haut- und Stringerquerschnitt in Abbildung 3.10 dargestellt. Die Steifigkeiten der Bereiche von Stringerfuß und Haut (dunkelblau) werden durch Addition der ABD-Matrizen mit einem gemeinsamen Element abgebildet. Die Steifigkeit des Stringersteges wird als Balkenelement auf der Referenzebene in das Modell integriert.

#### 3.4.3. Verwendete Randbedingungen

Die Randbedingungen können im Programm BEOS entlang der äußeren Kanten des Paneels (siehe Abbildung 3.8) für die Freiheitsgrade  $u, v, w$  und die jeweilige Rotation um die Achse entlang der Kante  $w_r$  definiert werden. Diese können freigelassen oder gesperrt werden und

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

Rand	$u$	$v$	$w$	$w_r$
$x = 0$	0	0	0	0
$x = l_x$	-	0	0	0
$y = 0$	-	0	-	0
$y = l_y$	-	0	-	0

Tabelle 3.2.: Verwendete Randbedingungen für axial belastete Schalen in BEOS

ermöglichen somit verschiedene Lagerungsbedingungen der Struktur.

Die Lagerungsbedingungen der in dieser Arbeit betrachteten Paneele sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst. Ziel der gewählten Randbedingungen ist das Verhindern von Starrkörperverschiebungen und Approximieren des mechanischen Verhaltens angrenzender Paneele in einem Rumpf oder Flügel. Als weiteres Ziel der Randbedingungsdefinition sollen die erzeugten traglichen Maxima der Eigenformen in den mittleren Hautfeldern mindestens vergleichbar groß sein wie an den Paneelrändern. Ein Beispiel hierfür ist in Abbildung 3.11 gegeben. In der linken Abbildung weist die Paneelmitte sehr hohe Amplituden auf, wohingegen die hohen Amplituden in der rechten Abbildung ausschließlich am Paneelrand zu finden sind. Deutlich größere Amplituden der Eigenformen an den Rändern weisen auf ein nachgiebigeres Verhalten des Randbereiches hin, was eine Reduktion der ermittelten Beullast zur Folge hat. Unter Berücksichtigung des Koordinatensystems in Abbildung 3.8 liegen folgende Betrachtungen der Definition der Randbedingungen für die Freiheitsgrade  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $w_r$  zugrunde:

- $u$**  Der Freiheitsgrad in axialer Richtung ist ausschließlich am Rand  $x = 0$  gesperrt, um eine Starrkörperverschiebung zu verhindern. Die anderen Ränder werden nicht gesperrt, um eine Kontraktion des Paneels aufgrund der axialen Last zu ermöglichen.
- $v$**  Die Verschiebungen in tangentialer Richtung sind an allen Kanten gesperrt. Ein Freilassen dieser Verschiebungen führt zu einer geringeren Anschlusssteifigkeit an den Rändern  $y = 0$  und  $y = l_y$ . Wie Abbildung 3.11 rechts zeigt, prägt sich für dieses Beispiel eine Eigenform mit den größten Beulen an diesen Rändern anstelle der Paneelmitte aus. Die Fixierung dieses Freiheitsgrades ist andererseits möglich, da das Paneel in  $y$ -Richtung nicht belastet ist ( $N_y = 0$ ). Die Sperrung der Ränder  $x = 0$  und  $x = l_x$  hat durch die Sperrung der anderen beiden Ränder einen vernachlässigbaren Einfluss, da keine maßgeblichen Verschiebungen stattfinden können.
- $w$**  In radialer Richtung ist eine Lagerung an den Rändern ungeeignet, da Eigenformen mit ungerader Anzahl an Halbwellen unterdrückt werden. Am vorteilhaftesten ist daher die radiale Lagerung an den Spanten, was jedoch von dem Interface zu BEOS nicht ermöglicht wird. Da-

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

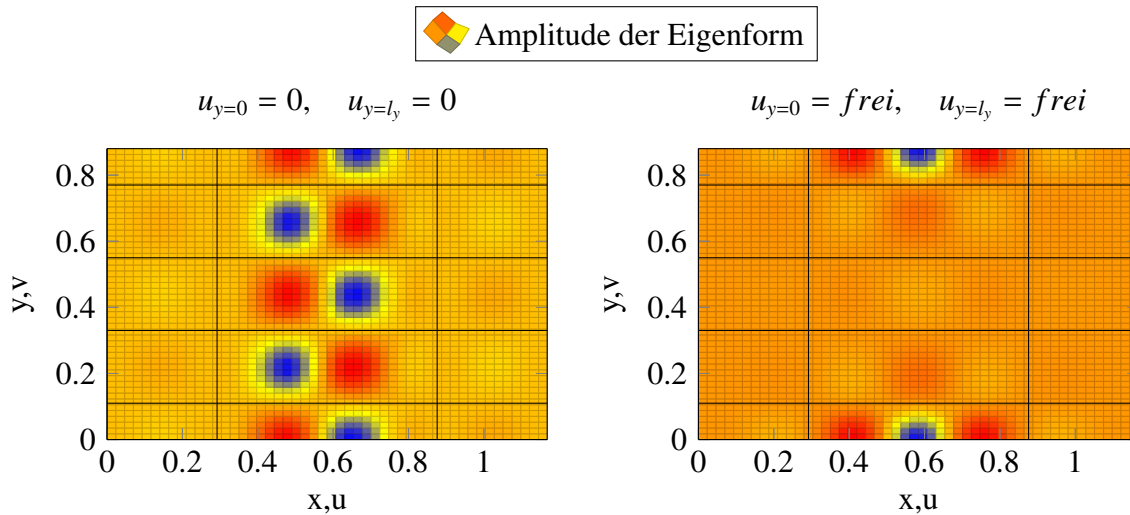


Abbildung 3.11.: Vergleich der Beuleigenformen in Abhängigkeit der Randbedingungen: Links werden die Randbedingungen aus Tabelle 3.2 verwendet. Rechts werden die Verschiebungen  $u$  an den Rändern  $y = 0$  und  $y = l_y$  freigelassen, wodurch sich die Maxima der Beuleigenform an den Rand verschieben.

her wird das Paneel an den Rändern  $x = 0$  und  $x = l_x$  gelagert. Dies wird den anderen Rändern vorgezogen, da durch das Seitenverhältnis von Stringer- und Spantabstand in axialer Richtung mehr Halbwellen pro Hautfeld auftreten als in  $y$ -Richtung. Der Einfluss auf die Beullast durch das Unterbinden der einzigen Halbwellen in  $y$ -Richtung ist größer als das Unterbinden einer von mehreren Halbwellen in axialer Richtung.

$w_r$  Die Rotation um die Ränder ist an den Rändern  $y = 0$  und  $y = l_y$  gesperrt. Druckbelastete Paneele bilden an diesem Rand genau eine halbe Halbwellen aus, die genau diese Eigenschaft hat. Damit können in  $y$ -Richtung realistische Eigenformen entstehen. Werden die Rotationen um diese Ränder nicht gesperrt, führt dies zu einer niedrigeren Anschlusssteifigkeit im Vergleich zur vollständigen Struktur eines Flugzeugrumpfes oder Flügels. Die Rotationen um die Ränder  $x = 0$  und  $x = l_x$  sind ebenfalls gesperrt, um eine zu niedrige Anschlusssteifigkeit zu verhindern.

#### 3.4.4. Lastaufbringung und Ermittlung der Beullast

Mit der Verwendung der zweiten Variation des Gesamtpotentials entfällt das direkte Aufprägen äußerer Lasten. Daher wird anstelle von äußeren Lasten ein Membranspannungszustand der Schalelemente modelliert, der modellhaft als homogen angenommen wird und sich durch linear statische Betrachtungen aus der äußeren Last des Paneels ergibt.

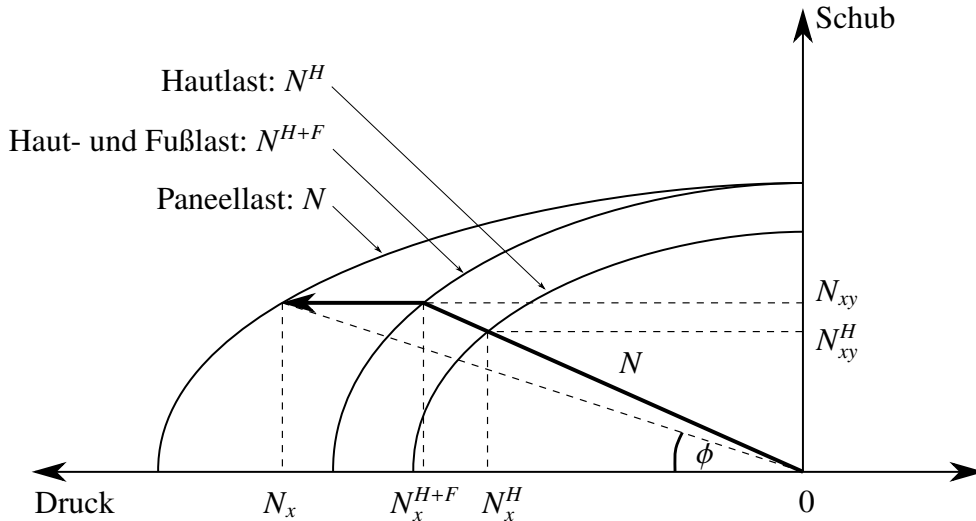


Abbildung 3.12.: Modellierte Lastverteilung für die lasttragenden Strukturen Haut (H), Fuß (F) und das gesamte Paneel für mehrachsige Lastfälle

Abbildung 3.12 veranschaulicht die auf die Paneelbreite homogenisierten Lastanteile der Strukturbestandteile Haut, Stringerfuß und Stringersteg. Idealisiert wird angenommen, dass Schublasten von der Haut und dem Stringerfuß übertragen werden, aber nicht vom Stringersteg. Auf der anderen Seite übertragen alle Strukturbestandteile Lasten in axialer Richtung. Die Lasten  $N_x$  und  $N_{xy}$  hängen von der mehrachsigen Gesamtlast  $N$  und dem Lastrichtungswinkel  $\phi$

$$N_x = N \cdot \cos \phi \quad (3.17)$$

$$N_{xy} = N \cdot \sin \phi \quad (3.18)$$

ab. Das Programm BEOS verwendet nach Geier [Gei72] und Rohwer [Roh76] Membranlasten der Schalenelemente  $N_x^H$  und  $N_{xy}^H$  als Eingabe- und Ausgabewerte. Daher müssen die in dieser Arbeit verwendeten Größen  $N$  und  $\phi$  in Abhängigkeit der Steifigkeiten in die Membranlasten der Schalenelemente überführt werden. Dies ist im Anhang A dargestellt.

### 3.4.5. Verifikation

Verifikationsstudien des verwendeten Modells sind von verschiedenen Autoren veröffentlicht. So vergleicht Geier [Gei91] Beos mit anderen Lösungen des linearen Stabilitätsproblems. Hier wird die Beullast überschätzt, da die untersuchte Konfiguration sensitiv auf lokales Versteifungsbeulen reagiert, was durch die Balkenmodellierung der Versteifungen nicht abgebildet

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

ist. Schillo [Sch08] untersucht verschiedene Modellierungsvarianten für die Stringer. Die hier vorgestellte Variante liefert bei einer Hautdickenvariation 3% bis 8% Abweichung verglichen mit einem hochaufgelösten FEM-Modell. Duvigneau [DF12] verifiziert das grob diskretisierte Stabilitätsmodell mit dem hochaufgelösten Modell aus Abschnitt 3.5. Hierbei werden die gleichen Randbedingungen und Belastungen des BEOS-Modells auf ein hochaufgelöstes FEM-Modell aufgebracht. Es werden Stringerhöhe, Stringerfußbreite, Lagenaufbaus sowie Stringer- und Spantabstand für Paneele mit T- und  $\Omega$ -Versteifungen betrachtet. Für Modelle bei denen Hautfeldbeulen kritisch ist, liefert es Abweichungen von 4% bis 40%. Zusätzlich vergleicht Duvigneau die Eigenformen für druck- und schubbelastete Paneele. Ebenso analysiert Duvigneau in einer Konvergenzstudie die Netz-Diskretisierung sowie Stringer- und Spantanzahl. Hieraus leiten sich die in dieser Arbeit verwendeten Diskretisierungen ab, die aus den Studien jeweils Fehlerwerte von unter 0.5% liefern:

- 6 Elemente zwischen den Stringern
- 4 Stringer
- 12 Elemente zwischen den Spanten
- 2 Spante

#### Stetigkeit der Lösung

Zur Bildung von Metamodellen dürfen die Ausgangsfunktionen nur geringe Unstetigkeiten aufweisen. Durch das iterative Näherungsverfahren der inversen simultanen Vektoriteration können Unstetigkeiten in der Lösung durch einen Wechsel in der Eigenform oder durch eine Änderung der nötigen Iterationen auftreten. Diese sollen hier an einem Beispiel quantifiziert werden.

Hierfür wird ausgehend von der Konfiguration des Referenzpaneels aus Unterabschnitt 3.1.2 der Stringerabstand von 0.15m bis 0.3m variiert und axial belastet. Das Ergebnis wird in Abbildung 3.13 veranschaulicht. An der blau markierten Beullastkurve sind visuell keine Unstetigkeiten zu erkennen. Erst der grüne Verlauf der Differenzenquotienten verdeutlicht die Existenz von Unstetigkeiten durch die Ausschläge. Der größte Ausschlag tritt bei  $b = 0.171\text{m}$  auf. Für diese und die vorherige Paneelkonfiguration sind die Eigenformen dargestellt. Die Ursache dieser Unstetigkeit ist eine Verschiebung der Eigenform, bei der die drei Beulen pro Hautfeld von einer leicht exzentrischen Form in das Zentrum des Paneels rücken. Dieselbe Ursache ist auch bei den weiteren großen Unstetigkeiten der grünen Kurve zu beobachten.

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

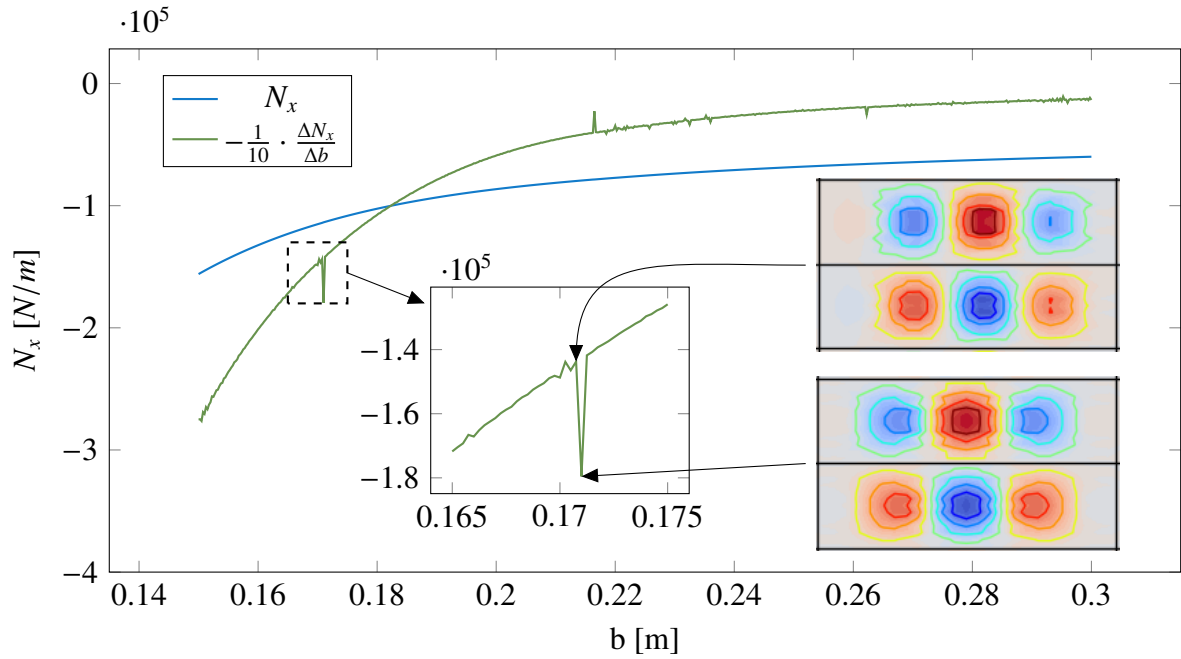


Abbildung 3.13.: Numerische Konvergenz der Beullast (blau) des grob diskretisierten Modells am Beispiel einer Variation des Stringerabstandes. Zur Verdeutlichung von Unstetigkeiten ist der Differenzenquotient (grün) dargestellt.

An der größten beobachteten Änderung des Differenzenquotienten beträgt die Unstetigkeit

$$\max \left( \left| \Delta N_{x,k} - \frac{\Delta N_{x,k-1} + \Delta N_{x,k+1}}{2} \right| \right) = 92 \frac{N}{m} \quad (3.19)$$

wenn sie mit dem Mittelwert der beiden umliegenden  $\Delta N_{x,i}$  verglichen wird. Dies entspricht 0.08% der Beullast. Hiermit ist die Unstetigkeit in einer Untermenge des Definitionsbereiches beschrieben, wodurch jedoch keine allgemeingültige Quantifizierung möglich ist.

Ein Einfluss der Anzahl der Lösungsiterationen auf die Beullast konnte nicht beobachtet werden.

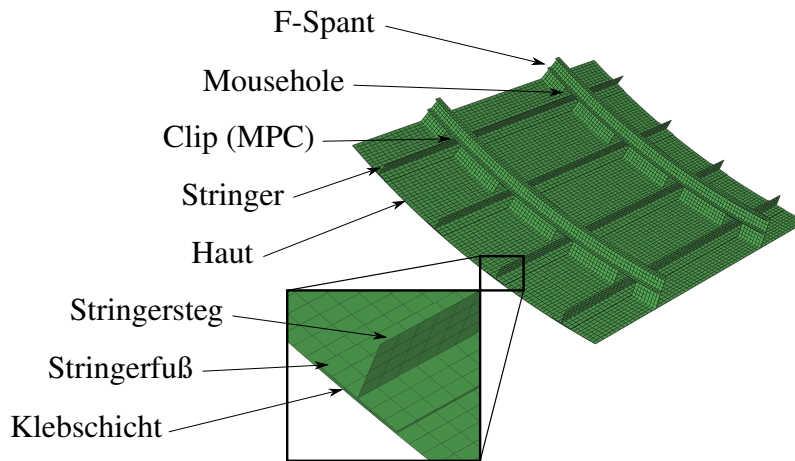


Abbildung 3.14.: Verwendetes FEM-Modell in Abaqus mit seinen Bestandteilen

## 3.5. Lineare Stabilitätsanalyse mit hochaufgelösten Modell

### 3.5.1. Zielstellung

Wie mit dem grob diskretisierten Modell soll mit dem hochaufgelösten Modell die lineare Beullast versteifter FVW-Paneele ermittelt werden. Die Lösung des Stabilitätsproblems erfolgt mit dem FEM-Programm Abaqus [Das14]. Dieses Modell soll die nötigen Freiheitsgrade beinhalten, das im Vergleich zum grob diskretisierten Modell zusätzlich das lokale Versteifungsbeulen simuliert werden kann.

### 3.5.2. Modellaufbau

Das FEM-Modell wird durch einen parametrischen Modellgenerator (siehe Geier [GFW11]) erzeugt und ist in Abbildung 3.14 dargestellt. Zu Notationen und Elementbeschreibungen in Abaqus sei auf die Dokumentation [Das14] verwiesen. Haut, Spante und Stringer sind über S4R-Schalenelemente und die Klebschicht zwischen Stringer und Haut mit C3D8-Elementen modelliert. Um den Effekt von Clips abzubilden, sind Stringersteg und Spantsteg entlang der Knoten ihrer jeweiligen Schnittlinie über Zwangsbedingungen (engl. Multiple Point Constraint (MPC)) miteinander verbunden. Die Verbindung der Elemente der verschiedenen Baugruppen wird über MPCs vom Typ „tie“ für koinzidente Knoten (z.B. Stringerfuß – Stringersteg) und für nicht koninzidente Knoten vom Typ „beam“ (z.B. Haut – Klebschicht sowie Klebschicht – Stringerfuß) realisiert.



### 3.5.3. Verwendete Randbedingungen

Die in das Modell eingebrachten Lasten werden über die axiale Kraft  $F_3$  und die tangentiale Kraft  $F_2$  an dem Knoten  $P_3$  in das Modell eingebracht, was Abbildung 3.15 veranschaulicht. Der Knoten  $P_3$  ist über Verschiebungsrandbedingungen vom Typ „equation“ an  $b_2$ ,  $P_4$ ,  $st_{2,F}$  und  $st_{2,S}$  in 3-Richtung gekoppelt um eine gleichmäßige Krafteinleitung zu gewährleisten. Diese Kopplung ist in der Tabelle der Randbedingungen 3.3 aufgelistet. Die Kraft  $F_2$  ist an  $b_2$ ,  $P_4$ ,  $st_{2,F}$  und  $st_{2,S}$  in  $u_2$  gekoppelt und übt damit eine Schublast auf das Paneel aus. Die Schubverformung wird näherungsweise als Parallelogramm angenommen, was über die gestrichelten Linien in Abbildung 3.15 angedeutet ist. Daher sind  $b_1$  und  $b_3$  auch direkt oder indirekt mit der Verschiebung  $u_3$  am Knoten  $P_3$  gekoppelt.

Die gesperrten Freiheitsgrade sind bis auf die folgenden Ausnahmen wie im grob diskretisierten Modell aus Unterabschnitt 3.4.3 gewählt. In radialer Richtung kann im hochaufgelösten Modell zusätzlich die Spantknotenlinie gesperrt werden. Tangential ist das Modell nur an  $P_1$  gesperrt, da  $b_1$  und  $b_3$  die parallelogrammförmige Verschiebung ermöglichen sollen. Durch die Modellierung der Stringerstege werden diese an den Rändern in  $ur_1$  gesperrt, um die Anschlusssteifigkeit abzubilden.

### 3.5.4. Ermittlung der Beullast

Im ersten Lösungsschritt wird eine statische Rechnung mit den festen Vorlasten  $N_{x, fest}$  und  $N_{xy, fest}$  durchgeführt, um die Konvergenz der Lösung zu verbessern und um mehrachsige Zug-Schub Lastfälle korrekt abbilden zu können, da sonst negative Eigenwerte als Durch-Schub Lastfall ermittelt werden. Auf Basis dieser statischen Analyse zur Bestimmung des Grundzustandes wird im nächsten Schritt eine lineare Eigenwertanalyse angefügt. Die Beullast ergibt sich ähnlich wie Gleichung A.14 im grob diskretisierten Modell mit dem Unterschied, dass im Abaqusmodell Kräfte auf das gesamte Paneel aufgebracht werden anstelle der Schalenelemente.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{x, crit} \\ N_{xy, crit} \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} N_x \\ N_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{x, fest} \\ N_{xy, fest} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n_{Str} b} \cdot \left( \lambda \cdot \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3, fest} \\ F_{2, fest} \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

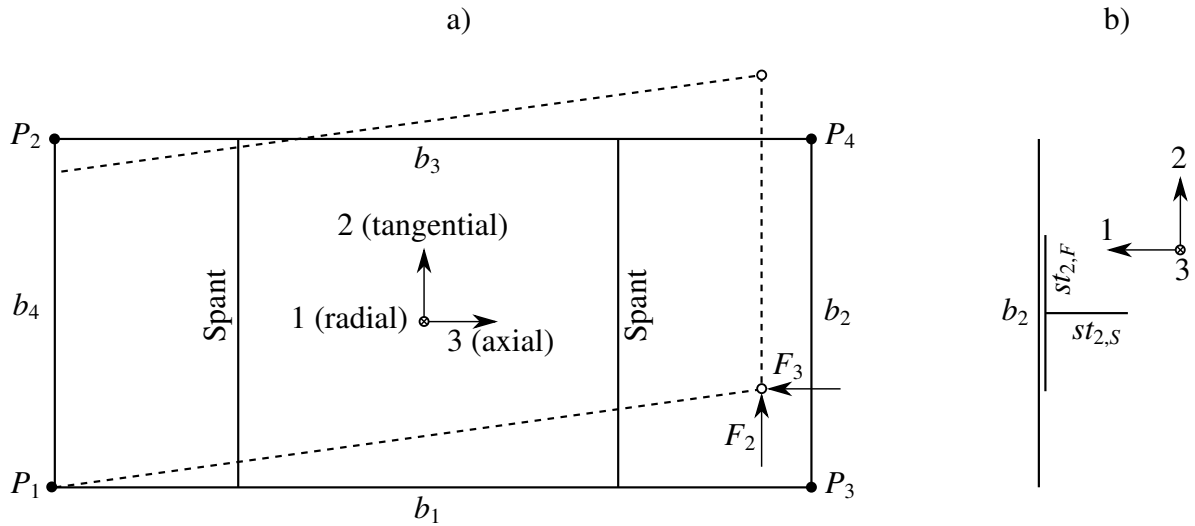


Abbildung 3.15.: Koordinatensystem und Bezeichnungen im hochaufgelösten Modell zur Definition von Randbedingungen a) Draufsicht b) Seitenansicht

Knoten-set	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$ur_1$	$ur_2$	$ur_3$
$b_1$	-	$u_2(b_1) = \frac{x_3}{l_{b_1}} u_2(P_3)$	-	-	-	0
$b_2$	0	$u_2(b_2) = u_2(P_3) + u_2(b_4)$	$u_3(b_2) = u_3(P_3)$	-	0	-
$b_3$	-	$u_2(b_3) = \frac{x_3}{l_{b_1}} u_2(P_4) + \left(1 - \frac{x_3}{l_{b_1}}\right) u_2(P_2)$	$u_3(b_3) = u_3(b_1)$	-	-	0
$b_4$	0	-	0	-	0	-
$P_1$	-	0	0	-	0	0
$P_2$	-	-	0	-	0	0
$P_3$	-	-	-	-	0	0
$P_4$	-	$u_2(P_4) = u_2(P_3) + u_2(P_2)$	$u_3(P_4) = u_3(P_3)$	-	0	0
Spant	0	-	-	-	-	-
$st_{2,F}$	-	$u_2(st_{2,F}) = u_2(P_3) + u_2(st_{4,F})$	$u_3(st_{2,F}) = u_3(P_3)$	-	-	-
$st_{4,F}$	-	-	0	-	-	-
$st_{2,S}$	-	$u_2(st_{2,S}) = u_2(P_3) + u_2(st_{4,S})$	$u_3(st_{2,S}) = u_3(P_3)$	0	-	-
$st_{4,S}$	-	-	0	0	-	-

Tabelle 3.3.: Verwendete Randbedingungen im hochaufgelösten Modell

### 3.5.5. Verifikation

Der hier beschriebene Modellierungsansatz mit der Anordnung der Schalen- und Klebschichtelemente, der Randbedingungsdefinition und der gewählten Diskretisierung ist äquivalent zu dem Ansatz von Kling [Kli10], Wolff [Wol12a] und Geier [GFW11]. Kling [Kli10] validiert das Modell eines T-Stringers versteiften FVW-Paneels für Drucklasten auf Basis von Testergebnissen. Ähnliche Studien sind für  $\Omega$ -Stringer in Wolff [Wol12a] veröffentlicht. Unter Schublast wurde das Modell ebenfalls von Wolff in [Wol12b] validiert. Diese nichtlinearen numerischen Untersuchungen lieferten sehr gute Übereinstimmungen im Last-Stauchungsverhalten, der Beullast und den Eigenformen mit dem Testergebnis. Ein großer Unterschied in den Modellen von Kling und Wolff zu dem Modell in dieser Arbeit und der von Geier [GFW11] ist der Wechsel von Testrandbedingungen zu Entwurfsrandbedingungen. Mit Entwurfsrandbedingungen werden höhere Beullasten erzielt, da die seitlichen Ränder durch diese Randbedingungen steifer sind.

Ein weiteres Ergebnis aus den obigen Studien ist die Festlegung der Diskretisierung. Vorherige Arbeiten mit dem obigen Netzgenerierungsprogramm basieren auf der Festlegung einer oberen Schranke der Elementkantenlänge  $l_{\text{Element,max}}$ . Dabei wird die größtmögliche Elementanzahl in den Versteifungsrichtungen verwendet, deren Elementkantenlängen  $l_{\text{Element,max}}$  nicht überschreiten. Hierbei untersucht beispielsweise Wolff [Wol12a] die Beullast, das Nachbeulverhalten, Iterationsanzahl, dissipierte Energie der künstlichen Dämpfung und Spannungsdiskontinuitäten von nichtlinearen Stabilitätsuntersuchungen mit unterschiedlichen oberen Schranken der Elementkantenlängen.

Da in dieser Arbeit die Stringer- und Spantabstände erheblich variiert werden, ist es sinnvoller die minimale Anzahl der Elemente zwischen den Stringern festzulegen, woraus sich die maximale Elementkantenlänge ergibt, die auf beide Ebenenrichtungen angewendet wird. Die Elementanzahl zwischen den Stringern anstatt zwischen Spanten wird verwendet, da zwischen Stringern meist genau eine Beulhalbwelle auftritt. Zwischen den Spanten ändert sich die Halbwellenanzahl hauptsächlich mit dem Spantabstand und mit Steifigkeitskennwerten der Haut, weswegen hier die Elementanzahl mit dem Verhältnis  $a/b$  variieren soll. Die zur Festlegung der Diskretisierung wichtigen Parameter sind in Tabelle 3.4 aufgelistet.

Die Stringer- und Spantanzahl wird wie in BEOS auf 4 bzw. 2 festgelegt.

### Stetigkeit der Lösung

Die Stetigkeit der Lösung des hochaufgelösten Modells wird wie für das vorherige Modell an einer Variation des Stringerabstandes  $b$  untersucht. Abbildung 3.16 zeigt die Beullasten für

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

	$l_{\text{Element,max}}[m]$	$b[m]$	Anzahl Elemente zwischen Stringern $b/l_{\text{Element,max}}$
Wolff [Wol12a]	0.006	0.15	25
Geier [GFW11]	0.006	0.26	43.3
Hier verwendete Werte	0.0025 bis 0.0075	0.1 bis 0.3	40

Tabelle 3.4.: Diskretisierung des hochaufgelösten Modells in dieser Arbeit im Vergleich

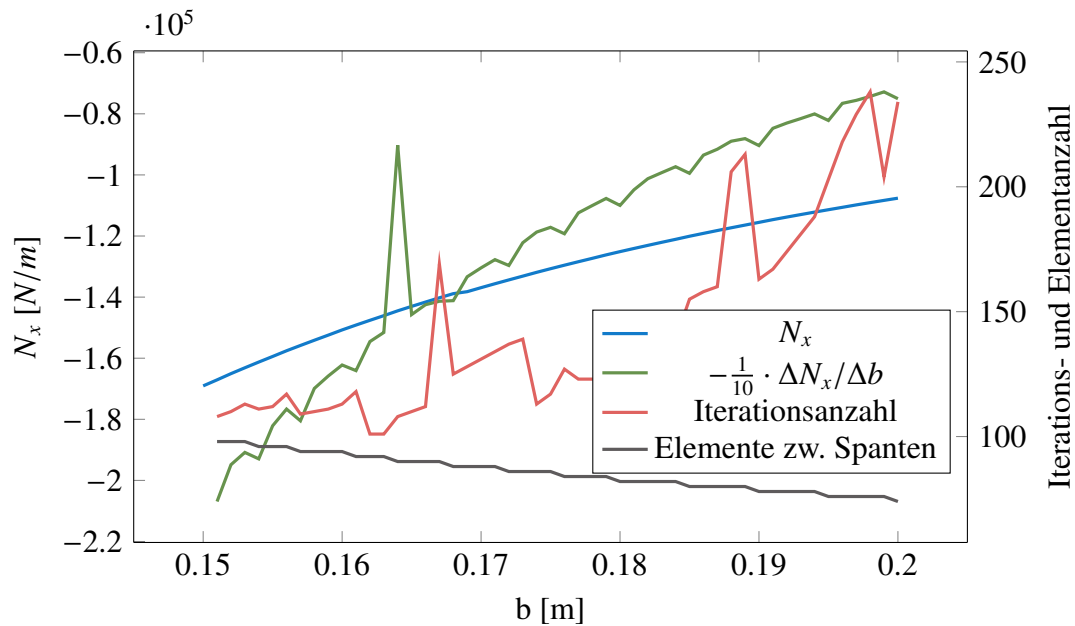


Abbildung 3.16.: Numerische Konvergenz der Beullast des hochaufgelösten Modells am Beispiel einer Variation des Stringerabstandes. Zur Verdeutlichung von Unstetigkeiten ist der Differenzenquotient, die Iterationsanzahl und die Elementanzahl zwischen zwei benachbarten Stringern dargestellt.

$b = 0.15\text{m}, \dots, 0.2\text{m}$ , die skalierten Differenzenquotienten, Iterationsanzahl sowie Elementanzahl zwischen zwei benachbarten Stringern. Alle weiteren Kenngrößen des Paneels können Tabelle 3.1 entnommen werden.

Um die Unstetigkeiten zu verdeutlichen, ist in der Abbildung der Verlauf der skalierten Differenzenquotienten dargestellt. Diese zeigen einen Ausschlag an jeder Stelle mit ändernder Elementanzahl. Bis auf den Ausschlag bei  $b = 0.164\text{m}$  erhöhen die Unstetigkeiten die Beullast etwas.

An der größten beobachteten Änderung des Differenzenquotienten bei  $b = 0.164\text{m}$  beträgt die

Unstetigkeit

$$\max \left( \left| \Delta N_{x,k} - \frac{\Delta N_{x,k-1} + \Delta N_{x,k+1}}{2} \right| \right) = 613 \frac{N}{m} \quad (3.21)$$

Das sind 0.36% in relativ zur Beullast.

## 3.6. Vergleich des grob diskretisierten Modell und hochaufgelösten Modell

### 3.6.1. Qualitativer Vergleich

Qualitativ unterscheiden sich die beschriebenen Modelle hauptsächlich durch folgende Faktoren.

Als erstes wird im grob diskretisierten Modell ein idealer, konstanter Membranspannungszustand angenommen, der sich im hochaufgelösten Modell vor allem an Stellen mit Steifigkeitssprüngen nicht einstellt.

Weiterhin unterscheiden sich die beiden Modelle stark in der Diskretisierung und in den Ansatzfunktionen. Im grob diskretisierten Modell werden 6 Elemente zwischen den Stringern mit kubischen Ansatzfunktionen verwendet, wohingegen im hochaufgelösten Modell 40 Elemente mit linearen Ansatzfunktionen modelliert sind.

Das hochaufgelöste Modell ermöglicht zusätzlich lokales Versteifungsbeulen durch die Definition von Stringer und Spant als Schalenmodell sowie deren Verbindung mit Clips. Diese Stabilitätsmodi beeinflussen sich gegenseitig, was Abbildung 6.12 veranschaulicht. Daher werden für Paneele mit hohen schlanken Stringern größere Unterschiede zwischen dem grob diskretisierten und dem hochaufgelösten Modell erwartet.

Die erweiterten Randbedingungen durch die in Abbildung 3.3 beschriebenen Gleichungen der Knotenverschiebungen des hochaufgelösten Modells versteifen das Modell und führen damit zu höheren Beullasten.

### 3.6.2. Quantitativer Vergleich

Abbildung 3.17 zeigt die absolute Beullast  $|N|$  der beiden Modelle in Abhängigkeit wichtiger Parameter. Nicht variierte Kenngrößen haben die Werte aus Tabelle 3.1 und sind rein axial belastet mit  $\varphi = 0^\circ$  (für eine Darstellung von  $\varphi$  siehe Abbildung 3.12).

Wie es aus der obigen qualitativen Betrachtung erwartet wird, liefert das hochaufgelöste Mo-

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

dell höhere Beullasten durch seine zusätzlichen Randbedingungen. Der maximale relative Unterschied ist 23% in der Variation der Fußbreite.

Der Vergleich der beiden Modelle wird hier in Bezug auf die Forschungshypothese 1 betrachtet. Für das zu erzeugende im folgenden Kapitel beschriebene Multilevel-Metamodell aus Gleichung 4.94 wird eine Transformation des Basismetamodells durch die lineare Regressionsfunktion  $f^y(x)\hat{\beta}^y$  durchgeführt, um die Stützpunkte des Zielmodells zu approximieren. Daher können im günstigsten Fall die konstanten und linearen Anteile des Fehlers  $|N_{Abaqus} - N_{BEOS}|$  durch die Regressionsformulierung abgebildet werden. Somit können auf der anderen Seite sowohl voneinander verschiedene Maximalstellen oder Phasenverschiebungen als auch unterschiedliche nichtlineare Anteile des Fehlers durch die Regressionsfunktion nicht korrigiert werden. Qualitativ sind konstante und lineare Unterschiede als größte Fehleranteile in der Abbildung zu erkennen, wohingegen nichtlineare Fehleranteile vergleichsweise klein sind. Eine Quantifizierung des Multilevel-Metamodellfehlers wird in den Anwendungskapiteln 5 und 6 vorgenommen.

In der Variation von  $\varphi$  liegt das Maximum wie erwartet bei reiner Axiallast mit  $\varphi = 0^\circ$ , wohingegen die Beullast mit steigendem Schubanteil abnimmt und ab  $\varphi \approx 72^\circ$  wieder zunimmt.

Bei der Betrachtung der Radiusvariation ist die versteifende Wirkung kleiner Radien gut zu erkennen. Die Variation des Stringerabstandes  $b$  zeigt einen starken Einfluss. Für die Werte des hochaufgelösten Modells kleiner  $b$  tritt lokales Versteifungsbeulen auf, weshalb die Kurve für  $b = 0.1m$  einen kleineren Anstieg als die Beullasten des grob diskretisierten Modells aufweist, da es lokales Versteifungsbeulen nicht abbildet.

Die Variation des Spantabstandes  $a$  zeigt wie erwartet einen größeren Einfluss für kleine  $a/b$ . Für große  $a/b$  geht die Beullast asymptotisch gegen einen festen Wert.

In der Variation der Fußbreiten  $b_F$  zeigt das hochaufgelöste Modell ein deutlich nichtlineareres Verhalten als das grob diskretisierte Modell, wohingegen die Variation der Stringerhöhe  $b_S$  für beide Modelle einen annähernd linearen Verlauf zeigen. Eine Ausnahme bildet die Stützstelle des hochaufgelösten Modells mit der größten Höhe  $b_S = 0.06m$ . Hier knickt die Kurve ab, da der Stabilitätsmodus von Hautfeldbeulen zu lokalem Versteifungsbeulen wechselt.

Die Variation von  $t_H$  zeigt den großen Einfluss der Hautdicke auf die Beullast. In der Stringerdickenvariation  $t_F$  liefert die Beullast mit dem hochaufgelösten Modell einen etwas geringeren Anstieg als mit dem grob diskretisierten Modell. Das kann durch Interaktionen zwischen Haut und Stringersteg für kleine  $t_F$  hervorgerufen werden. Für größere  $t_F$  verformen sich die Stringer kaum und es ergibt sich ein nahezu reines Hautfeldbeulen zwischen den Stringerfüßen.

Das in Hypothese 1 formulierte Potential der Genauigkeitssteigerung eines Metamodells mit

### 3. Numerische Stabilitätsanalyse versteifter Paneele aus FVW

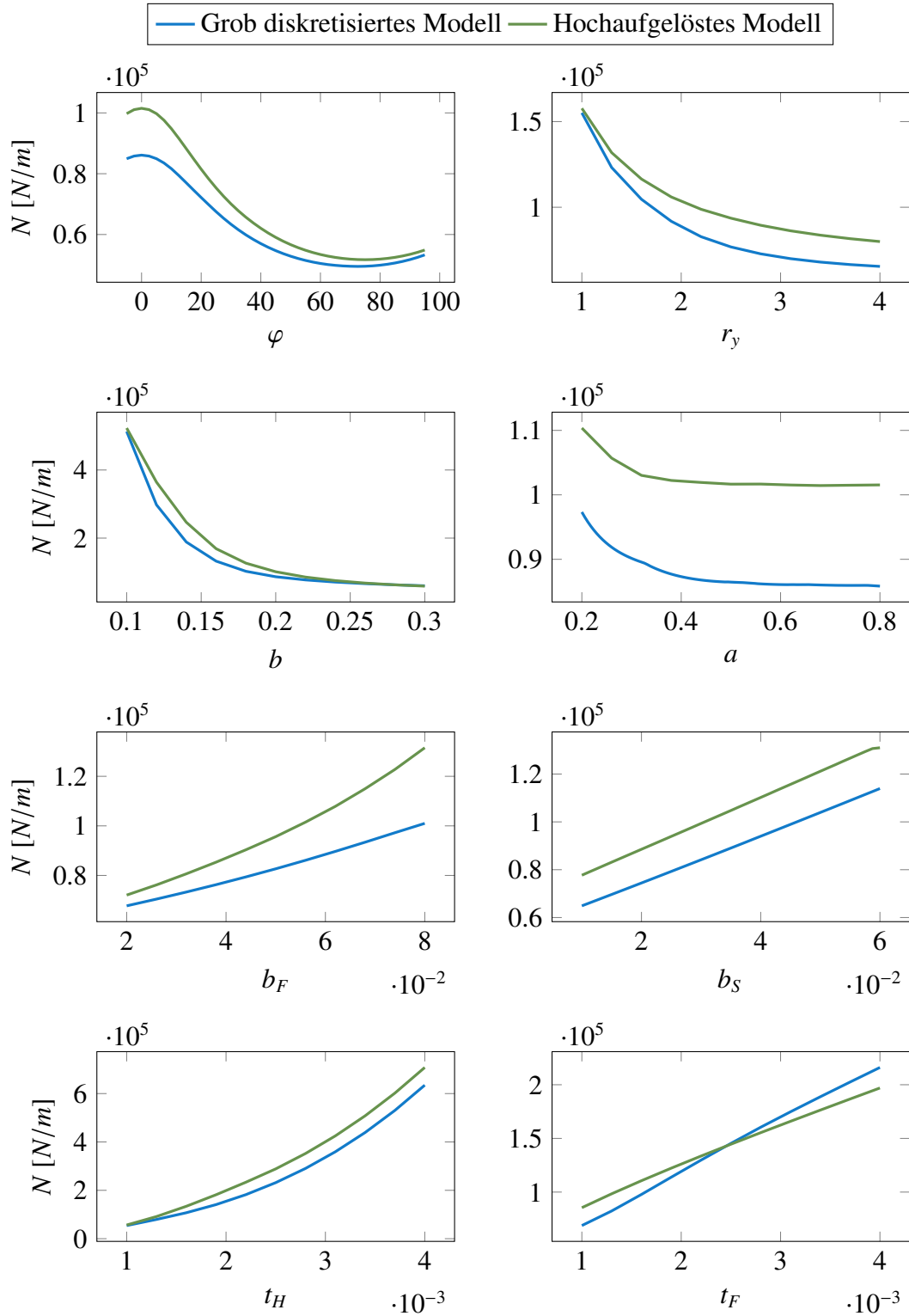


Abbildung 3.17.: Vergleich der Beullasten  $N$  ermittelt mit dem grob diskretisierten und dem hochaufgelösten Modell in Abhängigkeit wichtiger Parameter.

wenigen genauen Stützpunkten durch ein Metamodell basierend auf vielen weniger genauen Stützpunkten zeigt sich durch den gleichartigen Verlauf der beiden Modelle. Ein auf wenigen Stützpunkten des hochaufgelösten Modells basierendes Metamodell soll durch eine Metamodell des grob diskretisierten Modells verbessert werden.

Die hier vorgestellten Parametervariationen zeigen nur einen Ausschnitt des Parameterraumes, geben aber einen repräsentativen Eindruck der Parametereinflüsse auf die Hautbeullast bei der Modelle. In anderen Bereichen des Parameterraumes können sich die Einflüsse vor allem durch andere Stabilitätsmodi von denen in Abbildung 3.17 unterscheiden.

## 3.7. Zusammenfassung und Bezug zur Metamodellbildung

Die Stabilitätsgrenze ist ein auslegungsrelevantes Kriterium bei der Bewertung von Leichtbaustrukturen. Daher werden in diesem Kapitel als erstes die betrachteten versteiften Strukturen vorgestellt. Weiterhin werden die mechanischen Ursachen und die Folgen eines Stabilitätsproblems anhand von einfachen und komplexeren versteiften Strukturen erläutert. In dieser Arbeit wird die lineare Stabilitätsanalyse auf Basis von zwei verschiedenen FEM-Modellen mit unterschiedlicher Diskretisierung und Ansatzfunktionen verwendet. Diese bieten eine hohe Flexibilität, mit der über Modellvariationen verschiedene Aspekte der Metamodellbildung untersucht werden können.

Die für die Metamodellbildung zu berücksichtigende Stetigkeit bei der Stabilitätsmodelle wurde untersucht. Die identifizierten maximalen Unstetigkeiten betragen 0.08% und 0.36%. Diese Werte müssen in der Fehlerbetrachtung der Metamodelle berücksichtigt werden. Je nach Häufigkeit und Verteilung im gesamten Parameterraum, können sie die mit vertretbarem Aufwand erreichbare Metamodellgüte beschränken.

Für die Wahl des Metamodelltyps in Abschnitt 4.4 ist die Modellflexibilität - also die Größe und Art der Variationen der Zielfunktion in Abhängigkeit ihrer Parameter. Dazu wurde durch Variationen einzelner Parameter beider Modelle in Abbildung 3.17 die funktionalen Zusammenhänge der Parameter um diesen Nominalpunkt herum untersucht. So sind manche Bereiche (z.B.  $b_5$ ) nahezu linear und andere Parameter verhalten sich nahezu quadratisch. Der Parameter  $\varphi$  beispielsweise weist jedoch ein anderes Verhalten mit zwei Extrema auf.

Es existieren auch Bereiche mit Abweichungen von den oben beschriebenen Funktionsverläufen, die beispielsweise durch Interaktionen der Stabilitätsmodi oder durch Änderungen der Eigenformen hervorgerufen werden.



## 4. Methoden zur Metamodellerstellung

Nach dem Ablaufdiagramm aus Abbildung 2.1 auf Seite 8 werden neben den im vorherigen Kapitel vorgestellten Verfahren zur Strukturanalyse die Werkzeuge zur Versuchsplanung, Parameterbewertung, Metamodellbildung und -bewertung benötigt und in diesem Kapitel beschrieben. Als Erstes werden Methoden zur Versuchsplanung vorgestellt, mit denen Stützstellen im Entwurfsraum verteilt werden. Darauf aufbauend werden Sensitivitätsanalysemethoden beschrieben, die eine Quantifizierung der Wichtigkeit der gewählten Parameter bezüglich der Zielgrößen liefern. Mit den festgelegten Parametern können über einen Versuchsplan die Stützstellen ermittelt werden, die anschließend mit dem Ausgangsmodell die Stützwerte liefern. Stützstellen und Stützwerte werden zusammen als Stützpunkte bezeichnet. Es folgt die Beschreibung von Metamodellen. Ausführlich erläutert werden das in dieser Arbeit verwendete Kriging-Verfahren und das hierarchische Kriging. Abschließend werden Möglichkeiten vorgestellt, um die Abweichungen der Modellschätzungen im Vergleich zu Referenzwerten zu quantifizieren.

Die Ausführlichkeit des Krigingansatz richtet sich an Anwender mit Ingenieurshintergrund. Für diese Zielgruppe sollen die wichtigen Eigenschaften und Modelleinstellungen der Kriging zugänglich gemacht werden.

### 4.1. Stochastische und numerische Grundlagen

An dieser Stelle werden einige statistische Grundlagen eingeführt, die auf Henze [Hen13] und Hollatz [Hol03] basieren und in diesem Kapitel Verwendung finden.

Sei  $X$  eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit ihren möglichen absolut konvergierenden diskreten Ausprägungen  $x^i$  und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $P(\{x^i\})$  für  $i = 1 \dots n$ , so ist der Erwartungswert für diskrete Zufallsvariablen

$$E[X] =: \sum_{i=1}^n x^i \cdot P(\{x^i\}). \quad (4.1)$$

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

Analog gilt für die stetige Zufallsvariable  $X$  mit ihrer Dichtefunktion  $f$

$$E[X] =: \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (4.2)$$

so lange das uneigentliche Integral absolut konvergiert, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x) dx < \infty. \quad (4.3)$$

Der Erwartungswert beschreibt somit, welchen Wert eine Zufallsvariable im Mittel annimmt. Die für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften sind:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (4.4)$$

$$E[X + a] = E[X] + a \quad (4.5)$$

Die Varianz  $Var$  und Standardabweichung  $\sigma$  beschreibt, den quadratischen Abstand der Zufallsvariablen vom Erwartungswert.

$$\begin{aligned} Var(X) &=: \sigma^2(X) =: E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Der letzte Term der Gleichung ergibt sich aus Gleichung 4.4.

Die Kovarianz ergibt sich bei der Betrachtung der Summe der Varianz zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= E[(X + Y - E[X + Y])]^2 \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot E[(X - E[X])(Y - E[Y])]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hieraus zeigt sich, dass die Varianz der Summe zweier Zufallszahlen nicht der Summe der Einzelvarianzen entspricht und somit nicht additiv ist. Der zusätzliche Term wird Kovarianz  $Cov$  genannt.

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &=: E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Weiterhin beschreibt die Korrelation eine Normierung der Kovarianz

$$Cor(X, Y) =: \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \quad (4.9)$$

Für  $\sigma(X) = \sigma(Y)$  gilt

$$Cov(X, Y) = \sigma^2 \cdot Cor(X, Y). \quad (4.10)$$

Der Korrelationskoeffizient ist eine dimensionslose Größe und nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$-1 \leq Cor \leq 1. \quad (4.11)$$

## 4.2. Versuchsplanerstellung

### 4.2.1. Erwünschte Eigenschaften von Versuchsplänen

Die Versuchsplanung für Simulationsmodelle beschäftigt sich mit der Frage, wie  $n$  Stützstellen  $X = (x^1, \dots, x^n)$  in einem Entwurfsraum  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  verteilt werden können, sodass die Verteilung bestimmte Eigenschaften aufweist. Hierbei ist  $d$  die Anzahl an Dimensionen bzw. Parametern. Meist werden die Stützstellen im normierten Entwurfsraum  $\tilde{\Omega}$

$$\tilde{\Omega} = [0, 1]^d =: \{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_d)^T \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq \tilde{x}_1 \leq 1, \dots, 0 \leq \tilde{x}_d \leq 1\} \quad (4.12)$$

erstellt, was auch in den folgenden Beispielen verwendet wird. Da die zu erzeugenden Metamodelle eine möglichst gleichmäßige Güte im Entwurfsraum aufweisen sollen, müssen die Stützstellen eines Versuchsplans den Raum gut ausfüllen.

Somit ist das Ziel nach Saka [SGB07] zum einen eine hohe volumetrische Uniformität und zum anderen eine möglichst geringe Diskrepanz bei der Projektion der Stützstellen auf die einzelnen Koordinatenachsen. Die volumetrische Uniformität beschreibt den Grad der gleichmäßigen Verteilung von Stützstellen im Raum, sodass

- benachbarte Stützstellen möglichst gleichen Abstand haben,
- keine Regionen mit relativ wenigen Stützstellen vorhanden sind und
- die Stützstellen isotrop, also richtungsunabhängig sind.

Quantifizierungen, die eine oder mehrere dieser Eigenschaften abbilden, beschreibt Saka [SGB07]. Weit verbreitet ist nach Forrester [FSK08] die Maximin-Metrik, die von Johnson [JMY90] vorgestellt und Morris [MM95] erweitert wurde. Sie wird im den Folgenden Verwendung finden.

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

Sei  $l_1, l_2, \dots, l_m$  ein Vektor an einmaligen Entfernungen zwischen allen Stützstellen in der Stützstellenmenge  $X$ , der in aufsteigender Reihenfolge sortiert ist. Zusätzlich ist  $J_1, J_2, \dots, J_m$  so bestimmt, dass  $J_i$  die Anzahl an Stützstellenpaaren darstellt, die den Abstand  $l_i$  haben. Hieraus ergibt sich nach Morris [MM95]

**Definition 1.** Eine Stützstellenmenge  $X$  ist eine Maximin-Stützstellenmenge, wenn sie

- 1a**  $l_1$  unter allen Stützstellenmengen maximiert,
- 1b**  $J_1$  unter allen Stützstellenmengen, für die das obige zutrifft, minimiert,
- 2a**  $l_2$  unter allen Stützstellenmengen maximiert,
- 2b**  $J_2$  unter allen Stützstellenmengen, für die das obige zutrifft, minimiert,
- $\vdots$
- ma**  $l_m$  unter allen Stützstellenmengen maximiert,
- mb**  $J_m$  unter allen Stützstellenmengen, für die das obige zutrifft, minimiert.

Eine Näherungsfunktion dieses Optimierungsproblems ist in Morris [MM95] mit

$$\Phi_p(X) := \left( \sum_{j=1}^m J_j l_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.13)$$

gegeben.

Die Entfernung wird über die p-Norm durch

$$l_p(x^1, x^2) = \|x^1 - x^2\|_p := \left( \sum_{j=1}^d |x_j^1 - x_j^2|^p \right)^{1/p} \quad (4.14)$$

mit  $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$  ermittelt. Dabei wird für  $p$  oft die Rechtecknorm mit  $p = 1$  oder die Euklidische Norm  $p = 2$  verwendet.

Als weiteres Qualitätsmaß einer Versuchsplanung beschreibt die Diskrepanz in Untermengen des normierten Entwurfsraums den Unterschied zwischen der relativen Stützpunkthäufigkeit und dem Volumen in diesen Untermengen. Lemieux [Lem09, Kap. 5.1] und Saka [SGB07] definieren das D-Stern-Kriterium  $D$  als mögliche Quantifizierung. Eine vereinfachte Veranschaulichung der Diskrepanz ist die Projektion der Stützstellen auf jede Koordinatenachse. Die Diskrepanz beschreibt hier ebenfalls den Unterschied zwischen den Stützstellenprojektionen und einer Gleichverteilung in einer Untermenge von  $[0, 1]$ . Abbildung 4.4 auf Seite 58 veranschaulicht diese Projektionen über die an den Koordinatenrändern eingezeichneten Markierungen. Diese Eigenschaften werden im Folgenden zur Bewertung von Methoden zur Ver-

suchsplanerstellung angewendet.

##### 4.2.2. Vollfaktorieller Versuchsplan

Ein vollfaktorieller Versuchsplan (engl. Full Factorial Design (FFD)) ist ein Versuchsplan, bei dem  $n_b$  gleichmäßig verteilte Ausprägungen jedes Parameters miteinander kombiniert werden. Für  $d = 2$  und  $n_b = 7$  ergibt dies ein Gitter an Stützstellen wie es in Abbildung 4.4 a) dargestellt ist. Die Anzahl an Stützstellen ergibt sich aus

$$n = n_b^d \quad (4.15)$$

Dieser Versuchsplan erzeugt eine gleichmäßige Verteilung der Stützstellen und erfüllt somit die Anforderung der volumetrischen Uniformität. Jedoch ist die Diskrepanz sehr hoch, da eine Ausprägung eines Parameters jeweils mehrfach belegt ist, was Abbildung 4.4 a) veranschaulicht. Eine mögliche Folge dieser systematischen Stützstellenverteilung können systematische Fehler sein. Ein Beispiel sind harmonische Funktionen, bei denen die Abtastrate für einen Parameter durch  $n_b$  begrenzt ist, obwohl  $n$  Stützstellen zur Verfügung stehen. Diese systematisch reduzierte Abtastrate kann zu dem aus der Signalverarbeitung bekannten Alias-Effekt führen, der beispielsweise von Davies [DF01] und Forrester [FSK08, Kap. 1.5] beschrieben ist.

##### 4.2.3. Monte-Carlo

Im Gegensatz zur systematischen Verteilung beim FFD, werden bei der Monte-Carlo-Methode (engl. Simple Random Sampling (SRS)) Stützstellen zufällig im Entwurfsraum verteilt. Prinzipiell können beliebige Verteilungsfunktionen für diese Methode verwendet werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden Stützstellen durch eine Gleichverteilung erzeugt, da der Entwurfsraum gleichmäßig gewichtet werden soll. Da die Methode unabhängig von bisherigen Stützstellen ist, können beliebig neue Stützstellen hinzugefügt werden. Nachteilig ist jedoch, dass kein Mechanismus existiert, der für eine hohe volumetrische Uniformität und geringe Diskrepanz sorgt. Diese Nachteile sind in Abbildung 4.4 b) erkennbar.

##### 4.2.4. Latin Hypercube

Die einfachste Variante des Latin Hypercube (engl. Latin Hypercube Sampling (LHS)), wurde von McKay [MBC79] beschrieben und hat seine Wurzeln im lateinischen Quadrat. Jede Parameterachse wird innerhalb ihrer Grenzen in  $n - 1$  äquidistante Bereiche unterteilt. So ent-

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

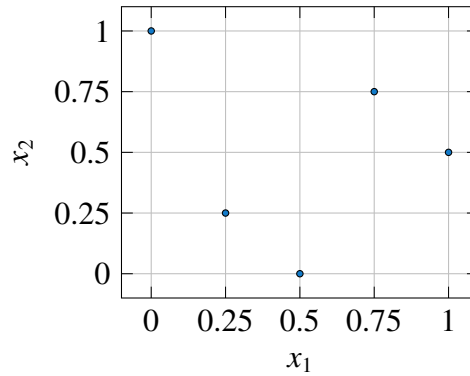


Abbildung 4.1.: Beispiel eines Latin Hypercubes mit 2 Parametern und 5 Stützstellen im Einheitsparameterraum.

stehen - je nach Dimensionalität des Problems - Gitterlinien, sich schneidende Ebenen oder Hyperebenen mit ihren Schnittpunkten. Anschließend werden für jeden Parameter Stützstellen auf diesen  $n$  Gitterlinien verteilt und zufällig mit den anderen Parametern kombiniert. So wird sichergestellt, dass sich auf jeder Gitterlinie für jeden Parameter genau eine Stützstelle befindet.

Als Beispiel sollen  $n = 5$  Stützstellen auf  $d = 2$  Parameter verteilt werden. Damit ergibt sich für jeden Parameter der Vektor möglicher Gitterlinienkoordinaten mit  $[0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0]^d$ . Wird nun eine zufällige Permutation für beide Parameter gewählt und nach ihrer Reihenfolge miteinander kombiniert, so ergibt sich für die Beispielpermutationen  $perm^1 = (1.0, 0.0, 0.5, 0.25, 0.75)$  und  $perm^2 = (0.5, 1.0, 0.0, 0.25, 0.75)$  der Latin Hypercube aus Abbildung 4.1 mit den Stützstellen  $X = ((1.0, 0.5)^T, (0.0, 1.0)^T, (0.5, 0.0)^T, (0.25, 0.25)^T, (0.75, 0.75)^T)$ .

Mit dieser Latinisierungs-Eigenschaft werden geringe Diskrepanzen ermöglicht. Auf der anderen Seite ist durch einen zufälligen Latin Hypercube keine hohe volumetrische Uniformität sichergestellt. Die geringste volumetrische Uniformität wird bei einer Verteilung der Stützstellen entlang der Raumdiagonalen erreicht.

Um diese Eigenschaft zu verbessern, kann ausgehend von einem Latin Hypercube mithilfe der Minimax-Metrik aus Gleichung 4.13 ein raumfüllender Latin Hypercube durch Optimierung der Stützstellenpositionen gefunden werden. Dies beschreibt beispielsweise Forrester [FSK08, Kap. 1.4.3]. Jedoch ist dieser Algorithmus für große Stützstellen- und Parameteranzahlen sehr aufwändig. Beachkofski [BG02] schlägt ein verbessertes Latin Hypercube mit dem Kürzel ILHS vor. Um eine bessere volumetrische Uniformität zu erzielen, werden initiale Stützstellen im Entwurfsraum in Unterräume aufgeteilt und der Abstand zur nächsten Stützstelle für alle Stützstellen im Unterraum maximiert.

### 4.2.5. Zentrische Voronoi-Tesselierung

Saka [SGB07] vergleicht LHS, ILHS, Hammersley Sequenzen, Halton Sequenzen, Zentrische Voronoi-Tesselierung (engl. Centroidal Voronoi Tessellation (CVT)) und latinisierte Zentrische Voronoi-Tesselierung (engl. Latinized Centroidal Voronoi Tessellation (LCVT)) bezüglich ihrer volumetrischen Uniformität und Diskrepanz. Sie kommen zu dem Schluss, dass LCVT den besten Kompromiss darstellen, weswegen CVT und LCVT im Folgenden erklärt werden und in dieser Arbeit Verwendung finden.

#### Definition

CVT basiert auf Voronoi-Diagrammen, mit denen sich u.a. der Namensgeber Georgi W. Voronoi am Anfang des 20. Jahrhundert beschäftigte. Die Eigenschaften von Tesselierung, Voronoi-Tesselierung und zentrischer Voronoi-Tesselierung werden nun vorgestellt und basieren auf Du [DFG99] und Saka [SGB07].

Eine Tesselierung in  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ist eine Menge von Punktmengen  $V = (V_1, \dots, V_n)$  mit den Eigenschaften

- $V_i \subset \Omega$ ,
- $V_i$  ist eine abgeschlossene Menge,
- $\cup_{i=1}^n V_i = \Omega$ ,
- $\mu(V_i \cap V_j) = 0$  für alle  $i \neq j$ .

Dabei ist  $n$  die Anzahl der Stützstellen,  $i, j = 1, \dots, n$  und  $\mu$  das Lebesgue-Maß<sup>1</sup> auf  $\Omega$ .

Eine Voronoi Tesselierung von  $\Omega$  bezüglich einer Menge an Stützstellen  $X = (x^1, \dots, x^n)$  der Kardinalität  $n$  mit  $x^i \in \Omega$  ist eine Menge, die

$$V_i = \{z \in \Omega : \|z - x^i\| \leq \|z - x^j\|\} \quad (4.16)$$

für alle  $i \neq j$  erfüllt. Die Mengen  $V = (V_1, \dots, V_n)$  heißen Voronoi Diagramme und  $(x^1, \dots, x^n)$  sind die dazugehörigen Generatoren. Jede Menge  $V_i$  heißt Voronoi-Region oder auch Voronoi-Zelle bezüglich  $x^i$ .

Für eine zentrische Voronoi Tesselierung müssen zusätzlich alle Generatoren der Voronoi-Regionen in deren Schwerpunkten  $\bar{x}^i$  liegen. Somit gilt folgende Bedingung für eine zentrische Voronoi Tesselierung

---

<sup>1</sup>Ein Maß im euklidischen Raum zur Beschreibung des Inhalts (Länge, Fläche, Volumen) eines Gebiets

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

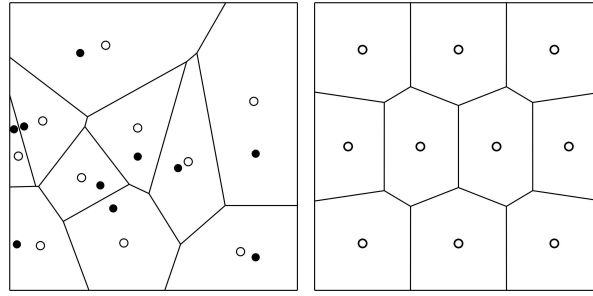


Abbildung 4.2.: Beispiel einer initialen Voronoi Tesselierung (links) und einer Centroidal Voronoi Tesselierung (rechts) von Saka [SGB07]. Der schwarze Punkt stellt die Stützstelle und der weiße den Flächenschwerpunkt dar.

$$x^i = \bar{x}^i \quad (4.17)$$

mit dem Schwerpunkt  $\bar{x}^i$ , der sich durch den Erwartungswert

$$\bar{x}^i = E[V_i] \quad (4.18)$$

beschreiben lässt.

Abbildung 4.2 stellt links die gewöhnliche Voronoi Tesselierung der zentrischen Voronoi Tesselierung gegenüber. Im linken Bild sind die schwarzen Punkte als Generatoren der Voronoi-Regionen dargestellt, wohingegen die Punkte mit weißer Füllung den Schwerpunkt der Voronoi-Regionen beschreiben. Für das CVT auf der rechten Seite sind Generatoren und Schwerpunkte wie in Gleichung 4.17 koinzident.

CVT liefern eine sehr gute volumetrische Uniformität, da die Inhalte der Voronoi-Region ähnlich groß sein müssen. Dies ist in den Abbildungen 4.2 und 4.4 d) gut zu erkennen. Auf der anderen Seite ist die Diskrepanz von CVTs zu einer Gleichverteilung auf den Parameterachsen hoch im Vergleich zum Latin-Hypercube aus Unterabschnitt 4.2.4, was in Abbildung 4.4 dargestellt ist.

#### Numerisches Verfahren zur Erstellung von CVTs

Da es keine direkte algebraische Vorschrift zur Erstellung von CVTs gibt, müssen diese iterativ ermittelt werden. Ju [JDG02] gibt eine Übersicht über die möglichen numerischen Verfahren. Im von Ju genannten Algorithmus 1 werden initiale Generatoren  $x^i$  über einen anderen Versuchsplan (z.B. die Monte-Carlo-Methode) erzeugt. Anschließend wird iterativ zufällig ein Punkt erzeugt, der gewichtet mit dem nächstliegenden Generator  $x^i$  den Generator  $x^i$  der fol-



#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

genden Iteration liefert. Dies wird so lange durchgeführt, bis ein Konvergenzkriterium erreicht ist. Dieses probabilistische Verfahren hat geringe Kosten pro Iteration, benötigt aber sehr viele Iterationen zum Konvergieren.

Algorithmus 2 basiert ebenfalls auf der Erstellung initialer Generatoren  $x^i$  über einen anderen Versuchsplan. Auf Basis derer werden geometrisch die Voronoi-Regionen  $V_i$  und deren Schwerpunkte  $\bar{x}^i$  ermittelt. Diese Schwerpunkte dienen als neue Generatoren, um den Vorgang iterativ durchzuführen. Dieses Verfahren ist bei gleichen initialen Generatoren deterministisch. Nachteilig ist der hohe numerische Aufwand, in jeder Iteration Voronoi-Regionen und deren Schwerpunkte zu ermitteln.

Der dritte beschriebene Algorithmus ist eine Kombination aus den vorherigen vorgestellten Verfahren und stellt nach Ju eine Generalisierung dieser Algorithmen dar. Da dieses Verfahren von Ju als vorteilhaft gegenüber den vorherigen beiden Verfahren dargestellt wird, kommt es in dieser Arbeit zur Anwendung und wird detailliert vorgestellt.

**Algorithmus.** In der Region  $\hat{\Omega}$  mit der Stützstellenanzahl  $n$  werden diese Schritte durchgeführt:

1. Es werden eine natürliche Zahl  $n_q$  mit  $n_q > 0$  und die reellen Werte  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  gewählt, sodass gilt  $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$  und  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ . Eine initiale Stützstellenmenge  $X$  wird z.B. mithilfe der Monte-Carlo-Methode 4.2.3 bestimmt. Die Größen  $k_i = 1$  mit  $i = 1 \dots n$  werden gesetzt.
2. Es werden  $n_q$  Stützstellen  $Z = (z^1, \dots, z^{n_q})$  beispielsweise mit der Monte-Carlo-Methode gewählt.
3. Für alle  $i = 1 \dots n$  werden die Mengen  $W_i$  erstellt und die Punkte  $z_j$ , die in der Voronoi-Region  $V_i$  (Gl. 4.16) liegen, der Menge  $W_i$  zugeordnet. Ist  $W_i$  leer, wird zu 4. gesprungen. Anderenfalls wird das arithmetische Mittel  $\bar{u}_i$  mit  $\bar{u}_i = E[W_i]$  ermittelt und

$$x^i \leftarrow \frac{(\alpha_1 k_i + \beta_1) x^i + (\alpha_2 k_i + \beta_2) \bar{u}^i}{k_i + 1} \quad (4.19)$$

sowie

$$k_i \leftarrow k_i + 1 \quad (4.20)$$

gesetzt. Die neuen  $x^i$  beschreiben die neuen Stützstellen, die in der nächsten Iteration verwendet werden.

4. Erfüllen die neuen  $x^i$  ein Konvergenzkriterium, so wird abgebrochen. Andernfalls wird bei Schritt 2 fortgefahren.

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

Werden für diesen Algorithmus  $n_q = \alpha_1 = \beta_2 = 1$  und  $\alpha_2 = \beta_1 = 0$  gewählt, so erhält man das gleiche Verfahren wie in Algorithmus 1. Ist  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  und  $\alpha_2 = \beta_2 = 1$ , so nähert sich dieses Verfahren mit steigendem  $n_q$  an eine probabilistische Version des Algorithmus 2 an. In dieser Arbeit wird für die im Schritt 1 zu wählenden Parameter auf Basis der Erkenntnisse von Ju und eigenen Untersuchungen  $n_q = 5 \cdot n$ ,  $\alpha_1 = 0.95$ ,  $\alpha_2 = 0.05$ ,  $\beta_1 = 0.5$ ,  $\beta_2 = 0.5$  gewählt. Abbildung 4.3 verdeutlicht Schritt 2 und 3 aus dem Algorithmus. Mit Hilfe von Gleichung 4.19 werden die neuen Generatoren  $(x_{neu}^1, \dots, x_{neu}^n)$  aus einer Linearkombination der alten Generatoren  $(x_{alt}^1, \dots, x_{alt}^n)$  und der arithmetischen Mittel  $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$  der Mengen  $(W_1, \dots, W_n)$  erzeugt.

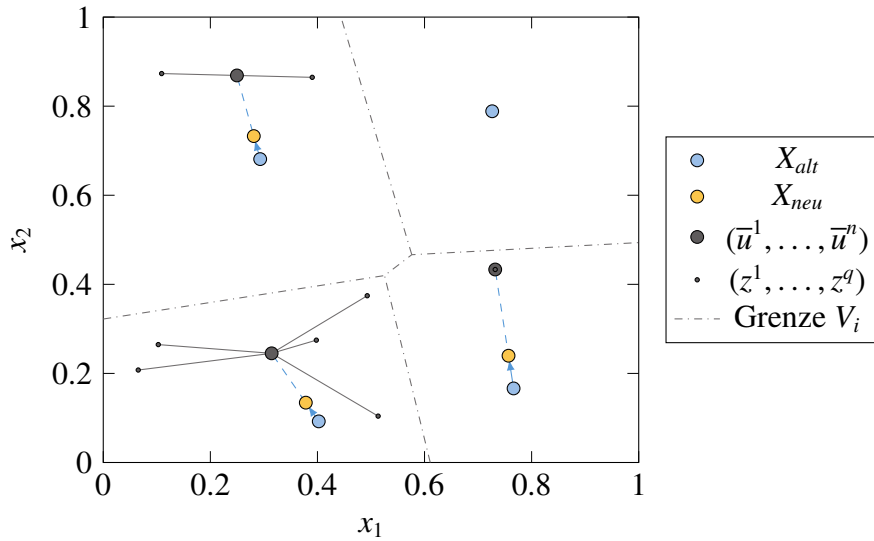


Abbildung 4.3.: Iterationsschritt aus Algorithmus 3 von Ju. Die neuen Generatoren  $X_{neu}$  werden aus einer Linearkombination der alten Generatoren  $X_{alt}$  und der arithmetischen Mittel  $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$  der Mengen  $(W_1, \dots, W_n)$  erzeugt.

Als Metrik für ein Konvergenzkriterium verwendet Ju mit

$$\mathcal{H}(X, V) = \sum_{i=1}^n Var(V_i) = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} |x - x^i|^2 dx \quad (4.21)$$

die Summe der Varianzen der Voronoi-Regionen und benennt es als „Energie“. Jedoch wird in den Beispielen der Veröffentlichung kein Schwellenwert definiert und stattdessen eine feste Iterationszahl verwendet, weswegen diese Metrik keine Verwendung findet. In dieser Arbeit wird die Gleichung 4.13 als Metrik verwendet. Für beide Konvergenzkriterien ist nachteilig, dass sie nicht monoton gegen einen Wert konvergieren. Daher wird in dieser Arbeit das Verfahren als konvergiert angesehen, wenn der bisher niedrigste Wert nach 10 Iteration nicht weiter

unterschritten wird. Diese Schwelle wurde auf Basis von Studien mit 1000 Stützstellen und 8 Parametern festgelegt.

##### 4.2.6. Latinisierte zentrische Voronoi-Tessellierung

Um den Nachteil der hohen Diskrepanz von CVTs zu umgehen, führt Saka [SGB07] die Latinisierung von Stützstellenmengen ein, die er auf CVTs anwendet und als LCVT bezeichnet.

**Algorithmus.** Gegeben sei die Anzahl der Parameter  $d$ , der Anzahl der Stützstellen  $n$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, d$  und die Stützstellen  $X = (x^1, \dots, x^n)$  mit  $x^i = (x_1^i, \dots, x_d^i)^T$  und  $\forall x^i \in [0, 1]^d$ .

Für jedes  $k = 1, \dots, d$  werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Sortiere  $X$  nach dem  $k$ -ten Parameter. Die sortierten Stützstellen seien  $Z = (z^1, \dots, z^n)$ .
2. Setze den  $k$ -ten Parameter jeder Stützstelle  $i$  in  $Z$  so, dass sie ihrer Sortierung nach gleichmäßig im Entwurfsraum verteilt sind.

$$z_k^i \leftarrow \frac{i - 1}{n - 1} \quad (4.22)$$

Die resultierenden Stützstellen seien wieder  $X$ .

Wie in Abbildung 4.4 e) dargestellt, weist das LCVT eine weiterhin hohe volumetrische Uniformität aber eine deutlich niedrigere Diskrepanz im Vergleich zu seinem ursprünglichen CVT aus Abbildung 4.4 d) auf.

##### 4.2.7. Bewertung der Versuchspläne

Saka [SGB07] vergleicht die Methoden zur Versuchsplanung, Latin Hypercube, CVT, Halton Sequenzen, Hammersley Sequenzen und deren latinisierte Varianten für verschiedene Größen von Stützstellenmengen und Anzahl an Dimensionen. Er kommt zu dem Schluss, dass LCVT den besten Kompromiss darstellt, wenn man Uniformität und Diskrepanz gleichzeitig als Bewertungskriterium verwendet. Abbildung 4.4 veranschaulicht die positiven Eigenschaften von LCVT im Vergleich zu den anderen vorgestellten Versuchsplänen. Daher wird im Folgenden LCVT als Versuchsplan verwendet.

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

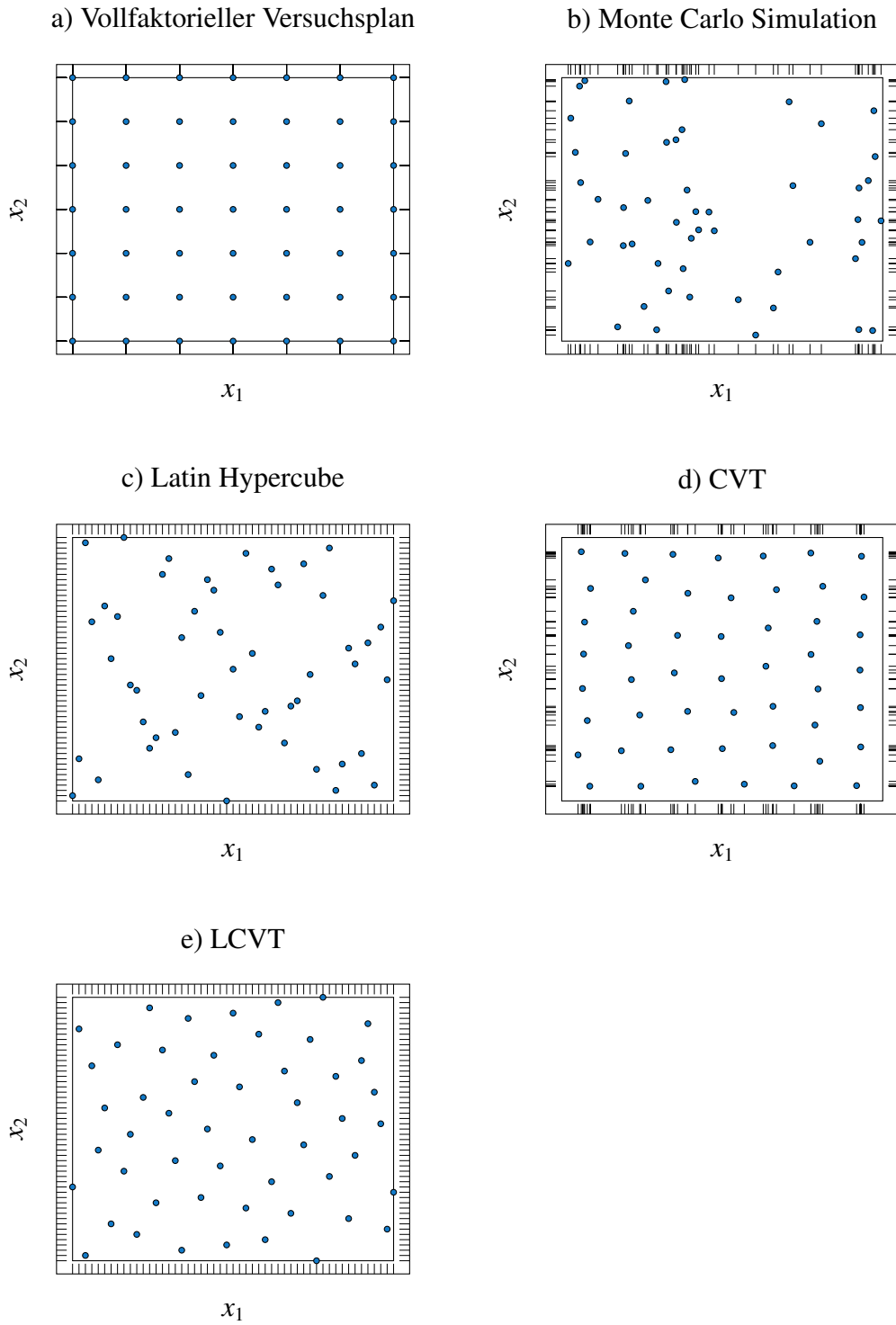


Abbildung 4.4.: Beispielhafte Stützstellenverteilung verschiedener Versuchspläne mit 51 Stützstellen im normierten Entwurfsraum  $\tilde{\Omega} = [0, 1]^d$  a) Vollfaktorieller Versuchsplan (49 Stützstellen), b) Monte Carlo, c) Latin Hypercube, d) CVT, e) LCVT

## 4.3. Sensitivitätsanalyse

### 4.3.1. Zielsetzung der Sensitivitätsanalyse

Metamodelle werden erzeugt, um eine schnelle Antwort einer teuren Analysefunktion zu ermitteln, ohne die eigentliche Analysefunktion auswerten zu müssen. Dazu müssen zur Metamodellerstellung sehr viele Stützstellen ermittelt werden. Die Anzahl an notwendigen Stützstellen hängt von vielen Faktoren ab. Ein wichtiger Faktor ist nach Forrester [FSK08] die Anzahl der verwendeten Parameter  $d$ . Somit ist es nötig, wichtige Parameter von deutlich weniger wichtigen Parametern trennen zu können. Es stellt sich die Frage: Wie kann man vor dem Erstellen der eigentlichen Stützstellen des Metamodells bewerten, welche Parameter aus der Parametervariation ausgeschlossen werden können, ohne wichtige Effekte zu vernachlässigen? Queipo [QHS<sup>+</sup>05] benennt u.a. folgende Fragen, die dazu beantwortet werden müssen.

- Wie kann eine Rangfolge der Eingabeparameter bezüglich ihres Beitrags zur Variabilität des Ergebnisses erstellt werden?
- Können Parameter in abhängige oder konstante Größen umgewandelt werden, ohne die Ergebnisvariabilität signifikant zu reduzieren?
- Lassen sich Parameterinteraktionen identifizieren?

Nach Forrester [FSK08] ist in dem Entwurfsraum  $\Omega$  für den Fall einer mindestens einfach differenzierbaren Funktion  $y : \mathbb{R}^d \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die erste Ableitung  $\delta y / \delta x_j$  ein sinnvoller Indikator aus dem sich folgende idealistische Schlüsse ziehen lassen.

- Ist  $\delta y / \delta x_j = 0, \forall x \in \tilde{\Omega}$ , so kann der Parameter  $x_j$  vernachlässigt werden.
- Ist  $\delta y / \delta x_j = \text{const} \neq 0, \forall x \in \tilde{\Omega}$ , so ist der Parameter  $x_j$  linear und kann additiv verwendet werden.
- Ist  $\delta y / \delta x_j = g(x_j) \neq \text{const}, \forall x \in \tilde{\Omega}$ , so ist  $y$  in Bezug auf  $x_j$  nichtlinear.
- Ist  $\delta y / \delta x_j = g(x_j), \forall x \in \tilde{\Omega}$  mit  $g(x_j, x_k, \dots) \neq \text{const}$ , so ist  $y$  in Bezug auf  $x_j$  nichtlinear und  $x_j$  hat Interaktionen mit  $(x_k, \dots)$ .

Diese Einordnung dient eher zur idealen Klassifikation wichtiger und unwichtiger Parameter. Jedoch wird man  $\delta y / \delta x_j, \forall x \in \tilde{\Omega}$  nicht ermitteln können, da sonst kein Bedarf der Metamodellbildung bestehen würde. Stattdessen beschränkt man sich auf eine Approximation des Effekts eines Parameters auf die Funktion über numerische Verfahren. Weiterhin existiert keine generelle Aussage über die Anzahl an Funktionsauswertungen für eine ausreichende Reihenfolge der Parametervariabilität bezüglich der Funktion, da dies stets abhängig von möglichen Laufzeiten, der Gesamtrechendauer und -kosten ist.

Der Sensitivitätskoeffizient  $\xi_i$  beschreibt im Folgenden die Sensitivität des  $i$ -ten Parameters in Bezug auf die Funktion  $y : \mathbb{R}^d \supset \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit seinen Parametern  $x_j$  für  $j = 1 \dots d$  mit  $x \in \tilde{\Omega}$  und  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \mid \tilde{\Omega} = [0, 1]^d$ .

### 4.3.2. Korrelationskoeffizient als Maß der Sensitivität

Der Korrelationskoeffizient aus Gleichung 4.9 auf Seite 49 beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen oder Stichprobenmengen. Er wird oft für die Bewertung von Stichproben aus Zufallsexperimenten verwendet und ist ein wichtiger Baustein einer Sensitivitätsanalyse von freien aber auch kommerziellen Optimierungsframeworks wie Optimus [Noe15] und ModeFrontier [EST15].

Aus einer Stützstellenmenge  $X \in \mathbb{R}^{d \times n}$  und den Stützwerten  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$  kann für jeden Parameter  $j = 1, \dots, d$  der Korrelationskoeffizient ermittelt werden. Dies stellt den linearen Zusammenhang zwischen einem Parameter und den Stützwerten dar.

$$\xi_{cor} = \begin{pmatrix} |Cor(X_{j,1}, Y)| \\ \vdots \\ |Cor(X_{j,d}, Y)| \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Eine lineare Abhängigkeit eines Parameters von der zu untersuchenden Funktion besteht, wenn der Korrelationskoeffizient nahe  $-1$  bzw.  $1$  ist. Werte, die gegen  $0$  gehen, deuten auf nichtlineare Abhängigkeiten oder nur geringe Abhängigkeiten hin.

Nachteilig ist, dass der Korrelationskoeffizient ausschließlich den linearen Zusammenhang zwischen zwei Wertemengen beschreibt. So hat beispielsweise die quadratische Funktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  einen Korrelationskoeffizienten von  $Cor(x, y) = 0$ . Als weiteren Nachteil müssen viele Stützstellen ermittelt werden, um eine hohe statistische Konfidenz zu erreichen.

### 4.3.3. Methode nach Morris

Eine oft verwendete Methode zur Sensitivitätsanalyse ist die von Morris [Mor91]. Dabei wird der gesamte Entwurfsraum  $\tilde{\Omega}$  auf ein vollfaktorielles Gitter  $\tilde{\Omega}_{sub} \subset \tilde{\Omega}$  wie beim LHS-Verfahren in Abschnitt 4.2.4 auf Seite 51 mit  $n_b \geq 3$  gleichmäßig verteilten Ausprägungen pro Parameter beschränkt. Somit ist der Abstand zwischen jeder Ausprägung  $\Delta = 1/(n_b - 1)$ .

Nun wird eine Matrix  $B^* \in \tilde{\Omega}^{(d+1)} \subset \mathbb{R}^{(d+1) \times d}$  erstellt, in der in jeder Zeile eine Stützstelle  $x \in \tilde{\Omega}_{sub}$  enthalten ist.

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

$$B^* = \begin{pmatrix} x_{Start} \\ \vdots \\ x_{Ende} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Diese Matrix soll die Eigenschaft haben, dass jeder Parameter der ersten  $x_{Start}$  und der letzten Stützstelle  $x_{Ende}$  um  $\pm\Delta$  voneinander verschieden ist, in der Form, dass  $x_{start\_j} \pm \Delta = x_{end\_j}$  für  $j = 1, \dots, d$  ist. Alle Parameter von  $x_{Start}$  sind beschränkt auf

$$x_{start\_j} \in \left\{ \frac{1}{n_b - 1}, \frac{2}{n_b - 1}, \dots, \frac{n_b - 2}{n_b - 1} \right\}.$$

Die Stützstellen von  $x_{start}$  bis  $x_{end}$  wandeln sich nun derart, dass in jeder neuen Zeile der Matrix ein zufällig ausgewählter Parameter  $j$  - ohne Zurücklegen - den Wert von  $x_{end\_j}$  annimmt. Matrix  $B^*$  kann über folgende Gleichung ermittelt werden:

$$B^* = (1^{d+1}x_{start} + (\Delta/2[(2B - 1^{d+1})C^* + 1^{d+1}]))A^* \quad (4.25)$$

Dabei ist

$$B \in \mathbb{R}^{(d+1) \times d}, b_{ij} \in \{0, 1\}$$

eine Matrix mit der Eigenschaft, dass sich zwei aufeinanderfolgende Zeilen nur durch genau einen Eintrag unterscheiden.  $C^*$  beschreibt eine  $d$ - dimensionale Diagonalmatrix mit  $c_{ij} \in \{-1, 1\}$ . Letztlich ist

$$A^* \in \mathbb{R}^{d \times d}, a_{ij} \in \{0, 1\},$$

wobei jede Zeile und jede Spalte genau eine 1 an einer zufälligen Position enthalten und alle anderen Einträge 0 sind.

Ein Beispiel für in  $B^*$  repräsentierte Koordinaten ist in Abbildung 4.5 für  $d = 3$  und  $n_b = 3$  dargestellt. Dieses Beispiel wird durch die Matrizen

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

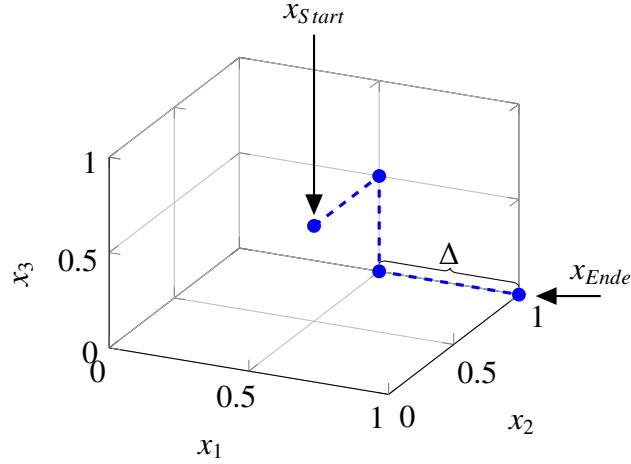


Abbildung 4.5.: Beispielhafte Darstellung eines Versuchsplans  $B^*$  in einem dreidimensionalen Entwurfsraum  $d = 3$  und  $n_b = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

erzeugt.

Somit wird in  $B^*$  zwischen zwei benachbarten Zeilen genau ein Parameter geändert, dessen Differenzenquotient über

$$\alpha_j = \frac{f(B_{k+1}^*) - f(B_k^*)}{\Delta} \quad (4.27)$$

mit  $\Delta = 1/(n_b - 1)$  und  $j, k = 1, \dots, d$  ermittelt werden kann. Hierbei ist  $k$  von  $j$  entsprechend der Sortierung in  $A$  abhängig. Morris bezeichnet  $\alpha_j$  als elementaren Effekt von Parameter  $j$ .

Die Matrix  $B^*$  kann nun  $r_{ee}$ -fach für verschiedene, zufällige  $x_{start}$  und  $x_{Ende}$  erstellt werden. Somit ergibt sich der Versuchsplan  $X \in \mathbb{R}^{r_{ee} \cdot (d+1) \times d}$



$$X = \begin{pmatrix} B_1^* \\ \vdots \\ B_{r_{ee}}^* \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

und die dazugehörigen elementaren Effekte  $\alpha_j = (\alpha_j^1, \dots, \alpha_j^{r_{ee}})$  nach Morris können ermittelt werden. Eine leichte Modifikation schlägt Campolongo [CCS07] vor, indem  $\alpha_j^* = (|\alpha_j^1|, \dots, |\alpha_j^{r_{ee}}|)$  ist. Hiermit wird verhindert, dass sich positive und negative Differenzenquotienten eines Parameters gegenseitig auslöschen. Das kann beim Stabilitätsproblem für den Parameter  $\varphi$  auftreten, was Abbildung 3.17 zeigt. Somit folgt der Sensitivitätskoeffizient  $\xi_{morris}$  und  $\xi_{morris}^*$  mit

$$\xi_{morris} = E \begin{bmatrix} |\alpha_1| \\ \vdots \\ |\alpha_d| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E[\alpha_1]| \\ \vdots \\ |E[\alpha_d]| \end{bmatrix} \quad \xi_{morris}^* = E \begin{bmatrix} |\alpha_1^*| \\ \vdots \\ |\alpha_d^*| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E[\alpha_1^*]| \\ \vdots \\ |E[\alpha_d^*]| \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Zusätzlich ist es möglich für die elementaren Effekte jedes Parameters die Standardabweichung  $\sigma(\alpha_i)$  zu berechnen. Eine hohe Standardabweichung eines Parameters wird entweder durch eine starke nichtlineare Beziehung zwischen Parameter und Analysefunktion oder durch Abhängigkeiten von Parametern untereinander hervorgerufen.

Dieses Verfahren benötigt  $r_{ee} \cdot (d + 1)$  Funktionsauswertungen. Diese zu ermitteln kann sehr teuer sein, vor allem, wenn die mögliche Menge an Parametern sehr groß ist. Vorteilhaft ist für dieses Verfahren die Verwendung von Gradienten an verschiedenen Stellen im Entwurfsraum. Die unterschiedlichen Stellen im Entwurfsraum ermöglichen eine Homogenisierung zwischen Bereichen mit großen und kleinen Gradienten eines Parameters, was die Korrektheit der Reihenfolge sensibler Parameter verbessert.

#### 4.3.4. Differenzenquotient an einer Nominalstelle

Eine im Vergleich zum vorherigen Verfahren weniger aufwändige Methode ist die Ermittlung von Differenzenquotienten an einer Nominalstelle  $x$ . Hierfür kann der Entwurfsraum entlang jeder Parameterachse unabhängig voneinander an  $n_b$  gleichmäßig verteilten Stellen abgetastet werden, was einer Schrittweite von  $\Delta = 1/(n_b - 1)$  entspricht. Somit sind die elementaren Effekte über

$$\alpha_j^i = \left( \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, \frac{i+1}{n_b-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, \frac{i}{n_b-1}, x_{j+1}, \dots, x_d)}{\Delta} \right) \quad (4.30)$$

definiert, die durch Gleichung 4.29 den Sensitivitätskoeffizienten  $\xi_{oat}$  bzw.  $\xi_{oat}^*$  liefern. Saltelli [SRA<sup>+</sup>08, Kap. 2.4.2] nennt ein leicht abgewandeltes Verfahren hiervon „one-at-a-time“ (OAT).

Mit dieser Methode sind zum einen vergleichsweise wenige Stützpunktauswertungen nötig. Zum anderen ist sie im Gegensatz zu den vorherigen Methoden deterministisch. Problematisch ist jedoch, dass die anderen Parameter zur Bestimmung eines  $\alpha_j$  konstant bleiben. Damit werden Abhängigkeiten zwischen Parametern nicht berücksichtigt, was zu Fehleinschätzungen der Parametersensitivität führen kann.

#### 4.3.5. Bewertung der Sensitivitätsverfahren

Neben den vorgestellten Verfahren existieren weitere Verfahren wie das von Andres [AH93] vorgestellte iterative fraktionelle faktorielle Design IFFD oder die Methode von Sobol [Sob93]. Mit diesem Verfahren können die Sensitivitäten von Problemen untersucht werden, deren Parameteranzahl im unteren vierstelligen Bereich sein kann. Da die Parameteranzahl für die Stabilitätsanalyse im unteren zweistelligen Bereich ist, werden diese Verfahren hier nicht verwendet.

Von den drei beschriebenen Verfahren wird die Methode von Morris als die aussagekräftigste angesehen. Zum einen untersucht die Methode den Parameterraum global und zum anderen werden Gradienten als Bewertungskriterium verwendet. Die Unsicherheit im Sensitivitätskoeffizienten ist von der Anzahl der ermittelten elementaren Effekte  $r_{ee}$  abhängig, was in den beiden folgenden Anwendungskapiteln bewertet wird.

Zum Vergleich der verschiedenen Verfahren wird der normierte Sensitivitätskoeffizient

$$\tilde{\xi}_i = \frac{\xi_i}{\max(\xi_i)} \quad (4.31)$$

mit  $0 \leq \tilde{\xi} \leq 1$  eingeführt. Hiermit sind die Sensitivitätskoeffizienten für jedes Verfahren auf ihren jeweils größten Wert normiert und vergleichbar.

Für Multilevel-Metamodelle ist es von Vorteil, dass das Basis- und Zielmodell ein ähnliches Verhalten aufweisen, was in den Anforderungen für Multilevel-Metamodell in Unterabschnitt 4.9.2 gefordert wird. Daher kann eine Sensitivitätsanalyse mit dem Basismodell durchgeführt werden, wodurch eine hohe Anzahl an Funktionsauswertungen bei vergleichsweise

geringen Analysekosten durchgeführt werden kann. Durch die Verwendung des Basismodells entsteht ein systematischer Fehler in den ermittelten Sensitivitäten wegen der unterschiedlichen Modellansätze zwischen Basis- und Zielmodell. Da die Sensitivitätsanalyse jedoch nur eine grobe Reihenfolge der Parametersensitivitäten liefern soll, sollte sich dieser Fehler als gering auswirken.

##### 4.3.6. Parametermodifikation nach der Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitäten der Parameter ermöglichen eine Reihenfolge der Parameter aufzustellen, mit dem Ziel, die Parameterauswahl auf die sensitivsten Parameter zu reduzieren.

Nicht sensitive Parameter können entfernt werden und als Konstante dem Modell zur Verfügung gestellt werden. Der daraus resultierende Fehler sollte auf Basis der Sensitivitätsstudie als gering eingeschätzt werden können und der Parameter kann in Detailstudien Berücksichtigung finden.

Eine weitere Möglichkeit der Parameterreduktion ist das Erzeugen von Abhängigkeiten zwischen den Parametern. So können Parameter durch beliebige Abbildungen abhängig von einem anderen Parameter gestaltet werden.

### 4.4. Überblick Metamodelle

#### 4.4.1. Zielstellung

Das Ziel von Metamodellen ist eine vereinfachende Abbildung  $\hat{y}$  zu finden, die das Verhalten eines Modells  $y : \mathbb{R}^d \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  im Entwurfsraum  $\Omega$  schätzt. Diese soll auf Basis einer Stützpunktmenge  $(X, Y)$  mit den Stützstellen  $X = (x^1, \dots, x^n) \subset \Omega^n$ , den Stützwerten  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T = (y(x^1), \dots, y(x^n))^T \in \mathbb{R}^n$ , der Stützpunktanzahl  $n$  und der Parameteranzahl  $d$  ermittelt werden.

Die Parameter ergeben sich aus der Sensitivitätsanalyse, die im vorherigen Abschnitt beschrieben ist. Weiterhin können die Stützstellen über einen Versuchsplan aus Abschnitt 4.2 und die dazugehörigen Stützwerte über das Modell  $y(x)$  erstellt werden. Für die Stützstellen eignet sich aus numerischen Gründen eine Transformation in den Einheitsentwurfsraum  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \mid \tilde{\Omega} = [0, 1]^d$ .

Generell gibt es unendlich viele Möglichkeiten für funktionale Beschreibungen, die konsistent mit den Stützpunkten sind. Daher müssen Annahmen über die Charakteristik des zu schätzen-

den Modells getroffen werden (siehe Rasmussen [RW06, Kap. 1.1]). Diese Annahmen werden in diesem und dem folgenden Abschnitt 4.5 besprochen und Strategien zur Ermittlung von  $\hat{y}$  vorgestellt.

##### 4.4.2. Konzeptuelle Metamodellerstellung

Metamodelle basieren auf der Annahme, dass Stützpunkte eine räumliche Ähnlichkeit zueinander besitzen. Somit haben Stützstellen, die einen geringen Abstand zueinander aufweisen, mit höherer Wahrscheinlichkeit einen ähnlichen Stützwert als Stützstellen mit hohem Abstand. Daher sollen Metamodelle nicht nur die gegebenen Stützpunkte gut schätzen können, sondern auch zwischen benachbarten Stützpunkten einen glatten Funktionsverlauf wiedergeben.

Um dies zu erreichen, wird nach Forrester [FSK08] in der Phase der konzeptuellen Metamodellerstellung aus den vielen möglichen Modelltypen ein Modell vom Anwender ausgewählt. Eine Auswahl von Ansätzen zur Metamodellerstellung ist im folgenden Abschnitt 4.4.3 beschrieben. Die Hyperparameter des Modells werden so eingestellt, dass die Approximation möglichst gut zu den Beobachtungen passt und die Annahme der räumlichen Ähnlichkeit erfüllt. Betrachten wir die lineare Regression der Form

$$\hat{y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \omega + \omega_0 \quad (4.32)$$

als einfaches Beispiel mit den Hyperparametern  $\omega_0$ , und  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)^T$ . Hiermit hat man sich mit der linearen Regression auf einen Metamodelltyp festgelegt. Die Festlegung des Metamodelltyps ist von der Erwartung abhängig, wie sich die zu schätzende Funktion  $y$  in Abhängigkeit ihrer Parameter verhalten wird.

Ist das zugrunde liegende physikalische Problem ein nahezu lineares, dann ist die Verwendung eines linearen Funktionsansatzes gerechtfertigt. Ist dieses Vorwissen nicht vorhanden, ist ein nichtlinearer komplexerer Metamodelltyp die sicherere Wahl. In der Modellerstellung müsste anschließend der nichtlineare Metamodelltyp den linearen Verlauf der Stützpunkte wiedergeben. Die Approximation der linearen Funktion gelingt jedoch nicht für jeden komplexeren nichtlinearen Metamodelltyp gut. Außerdem hat man damit konzeptuell die Chance verpasst, ein algebraisch einfaches Verfahren anzuwenden. Auf der anderen Seite kann die Wahl eines weniger komplexen Metamodelltyps bei einer komplexeren Funktion zu Unteranpassung führen, was Abbildung 4.6 auf der linken Seite zeigt.

Zusätzlich muss bei der Betrachtung der Funktion geprüft werden, ob die Daten verrauscht sind oder andere Unstetigkeiten der Funktion oder ihrer Ableitungen vorliegen. Rauschen und

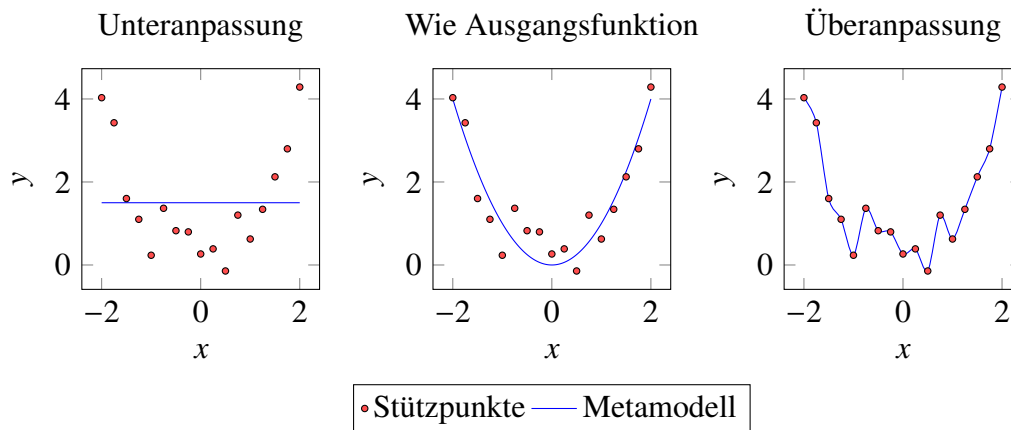


Abbildung 4.6.: Veranschaulichung von Unter- und Überanpassung am Beispiel einer quadratischen Funktion mit überlagertem Rauschen. Das unterangepasste Metamodell bietet nicht genug Modellflexibilität um die Stützpunkte zu approximieren, wohingegen das überangepasste Metamodell unerwünschte Eigenschaften der Stützpunkte modelliert.

Unstetigkeiten können jeweils verschiedene Ursachen haben. In ihrer Wirkung in Bezug auf Metamodelle können sie zu einer Überanpassung des Metamodells führen. Das bewirkt entweder ein Überspringen in dem Bereich zwischen den Stützpunkten oder das Metamodell lernt das Rauschen oder die Unstetigkeiten zusätzlich zum eigentlichen gewünschten Modellverhalten, was in Abbildung 4.6 auf der rechten Seite dargestellt ist. Interpolierende Metamodellverfahren sind hierfür besonders anfällig, da sie die verrauschten Stützwerte treffen müssen, also  $\hat{y}(x^i) = y_i, \forall x^i \in X, \forall y_i \in Y$ . Im Unterabschnitt 4.5.4 wird für das Krigingverfahren darauf eingegangen, wie das interpolierende Krigingmodell in ein approximierendes umgewandelt werden kann.

#### 4.4.3. Überblick Metamodellansätze

Metamodelle sind mathematische Formulierungen, die das Verhalten eines anderen Systems approximieren sollen – ein Modell des Modells, wie es Kleijnen [Kle75] formuliert. [BH93] zeigt verschiedene frühe Anwendungen von Metamodellen mittels Polynomregression im Bereich der Strukturmechanik. Viana [VSB14] gibt einen Überblick über Metamodelle in der Optimierung. Hierbei beschreibt er einen Wechsel von der früher viel verwendeten Polynomregression zu neueren Verfahren wie MARS (engl. multivariate adaptive regression splines) [Fri91], SVR (engl. Support Vector Regression) [CGS05] und die im Folgenden beschriebenen Radialen Basisfunktionen, Kriging, Neuronale Netze und Basisreduktionsmethoden (reduced

basis methods).

Folgend werden beispielhaft Metamodellansätze kurz vorgestellt, um deren gegensätzliches Verhalten in Bezug auf Metamodellflexibilität und Modellerstellungsaufwand zu zeigen. Die Modellflexibilität beschreibt dabei die Fähigkeit des Metamodells, verschiedenste Funktionsverläufe abzubilden.

### Regressionsmodelle

Metamodelle mit polynomielltem Ansatz sind eine viel verwendete und einfache Form, die beispielsweise für ein Polynom der Ordnung  $m = 2$  und  $d = 2$  Parameter über

$$\hat{y}(x) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_1 x_2 + \omega_4 (x_1)^2 + \omega_5 (x_2)^2 \quad (4.33)$$

mit den Gewichten  $\omega$  gegeben ist. Nach Box [BD87] können sie als Taylorreihe der wahren Funktion  $y$  angesehen werden, die bis zum  $m$ -ten Glied entwickelt ist. Die Ermittlung der Gewichte  $\omega$  erfolgt mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (engl.  $e_{MSE}$ ).

$$MSE(\hat{y}(x), y(x)) = E[(\hat{y}(x) - y(x))^2] \quad (4.34)$$

Daher wird  $\omega$  gefunden, wenn man das Optimierungsproblem

$$\min_{\omega} MSE(\hat{y}(x), y(x)) \quad (4.35)$$

löst. Für die Herleitung der Optimierung sei auf Box [BD87] verwiesen.

Aus Gleichung 4.33 könnte man bei Betrachtung des Parameters  $m$  schließen, dass die Erhöhung von  $m$  und somit die Verwendung von mehr Reihengliedern eine bessere Approximation ermöglicht. Jedoch machen mehr Ansatzterme das Modell flexibler, was zu Überanpassung an die Stützpunkte führen kann. Es gibt verschiedene Kriterien, um ein optimales  $m$  zu schätzen. Forrester [FSK08] und Cherkassky [CM98] schlagen vor, für ein optimales  $m$  den Modellfehler

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{X/\{x_i\}}(x_i))$$

zu minimieren, wobei  $\hat{y}_{X/\{x_i\}}(x_i)$  die später in Gleichung 4.96 vorgestellten Kreuzvalidierungswerte beschreibt.

## Radiale Basisfunktion

Nach Dyn [DLR86] folgen Radiale Basisfunktionen (RBFs) dem initialen Ansatz

$$\hat{y}(x) = \omega^T \Psi = \sum_{i=1}^{n_c} \omega_i \psi(\|x - c^i\|) \quad (4.36)$$

mit dem Gewichtsvektor  $\omega$  und der Basisfunktion  $\psi(r)$ . Als Norm  $\|\cdot\|$  wird meistens die 2-Norm verwendet. Die  $c^i$  sind die Zentren aller  $n_c$  Basisfunktionen. Bestimmt man die Anzahl der Zentren mit  $n_c = n$  und setzt sie koinzident mit den Stützstellen  $x^i = c^i, \forall i = 1, \dots, n$ , so kann  $\omega$  über die Interpolationsbedingung

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_i \psi(\|x^k - x^i\|) = y^i, \quad i, k = 1, \dots, n \quad (4.37)$$

durch die Lösung des Gleichungssystems

$$\Psi \omega = Y \quad (4.38)$$

ermittelt werden. Dabei ist  $\Psi = \psi(\|x^k - x^i\|)$  für  $i, k = 1, \dots, n$ .

Hier wird die Wahl der Basisfunktion wichtig. Besonders eignen sich multiquadratische Funktionen  $\psi(r) = \sqrt{r^2 + \gamma^2}$  und Gauß'sche Funktionen  $\psi(r) = \exp(-(\gamma r)^2)$  mit  $\gamma > 0$ . Mit diesen Funktionen ist die Matrix  $\Psi$  symmetrisch positiv definit<sup>2</sup> und damit über die Choleskyzerlegung effizient invertierbar. Dass die Gewichte  $\omega$  linear bezüglich Gleichung 4.36 sind, aber  $\hat{y}$  stark nichtlineare Zusammenhänge modellieren kann, während die Ermittlung von  $\omega$  numerisch günstig ist, kann als großer Vorteil der Methode gesehen werden.

Kriging ist eine Spezialform des RBF-Ansatzes, bei dem zusätzliche Hyperparameter  $\theta_j$  mit  $j = 1, \dots, d$  für jeden Parameter bestimmt werden. Sie erlauben, für jeden Parameter eine unterschiedliche Breite der Basisfunktion abzubilden. Die Herleitung und Ermittlung des Krigingschätzers wird im Abschnitt 4.5 beschrieben.

## Künstliche Neuronale Netze

Künstliche Neuronale Netze (engl. Artificial Neural Network (ANN)) spielen eine zentrale Rolle für Methoden des maschinellen Lernens. Ihr Name leitet sich von dem neuronalen Aufbau des Gehirns ab, dessen Funktionsweise mit dem Konzept des Künstlichen Neuronale Netzes imitiert werden soll. Sie sind schichtweise aufgebaut, wobei jede Schicht mehrere

<sup>2</sup>Dies trifft zu, solange keine Stützstellen existieren, die sehr nah beieinander liegen.

Neuronen besitzt. Mathematisch ist jedes Neuron

$$\psi\left(\sum_i \omega_i x_i + c\right)$$

über Eingangsparameter  $x_i$  mit der vorherigen Schicht und über ihren Ausgangswert mit der nächsten Schicht verbunden. Die Eingangsparameter eines Neurons werden mit Gewichten  $\omega_i$  und über eine Aktivierungsfunktion  $\psi$  auf den Ausgang abgebildet. Die Eingangsparameter der ersten Schicht sind dabei die Modelleingangsparameter und die Ausgangsparameter der letzten Schicht die Modellausgangsparameter.

Durch diese Struktur propagieren die Werte durch das Netzwerk und erzeugen die Ausgangsgrößen. ANNs wurden mit dem Algorithmus der Rückpropagation (engl. backpropagation) von Rumelhart [RHW86] erstmals verwendbar, da nun das Einstellen der Gewichte automatisch möglich war. Jedoch ist dieser Algorithmus für tiefe ANNs nicht effizient genug, weswegen wesentliche Verbesserungen vor allem von Hinton [Hin07] und Krizhevsky [KSH12] eingeführt wurden. Hierzu zählt die Einführung der Faltung (engl. Convolutional ANN) und sog. „drop outs“, bei denen Neuronen nicht mit jedem möglichen Eingangsparameter verbunden sind, was die Rechenzeit drastisch verkürzt. Es wurden Techniken eingeführt, mit denen schichtweise trainiert werden kann, bevor das gesamte ANN mittels backpropagation trainiert wird. Weiterhin werden die verwendeten Daten künstlich variiert, sodass mehr Testdatensätze mit dem gleichen Ergebnis zur Verfügung stehen. Hiermit kann die Anzahl der Schichten gesteigert werden, was zu tiefen ANNs (im Englischen deep learning) führt. Damit sind ANNs in der Lage, mit jeder Schicht eine abstraktere Klasse an Informationen zu aggregieren und komplexe Aufgaben wie beispielsweise Spracherkennung durchzuführen. Sie benötigen dafür jedoch sehr große Datenbestände zum Training.

#### **Projektionsbasierte Metamodelle**

Die bisher beschriebenen Modelle klassifiziert Peherstorfer [PWG18] als „Daten-Fit-Modelle“. Hierbei wird das Modell als blackbox mit seinen Ein- und Ausgängen betrachtet. Eine weitere Klasse von Metamodellen sind nach Peherstorfer die „Projektionsbasierten Modelle“. Hierbei wird die Struktur der Modellantwort verwendet, um sie durch eine Projektion auf eine Basis geringerer Größe zu reduzieren. Diese reduzierte Basis ist so konstruiert, dass sie den wesentlichen Charakter der Beziehung zwischen Systemeingang und -ausgang behält. Eine oft verwendete Methode hierfür ist die engl. Proper Orthogonal Decomposition (POD) (siehe Sirovich [Sir87]). Hierbei werden Beobachtungen (sog. „snapshots“) verwendet, um die



reduzierte Basis zu erstellen. Mit Hilfe dieser Reduktion kann der Systemausgang effizient approximiert werden. Dabei basiert der Systemausgang des Problems in der Regel auf Vektoren oder mehrdimensionalen Feldern.

In einem strukturmechanisch anschaulichen Beispiel approximiert Tian [TWZW18] die Beulformen eines Zylinders durch POD. Hierbei sind die Eigenformen  $x$  (aus Gleichung 3.16 auf Seite 29) die „snapshots“ aus denen die reduzierte Basis erzeugt wird. Mit der reduzierten Basis lassen sich die Steifigkeitsmatrizen des Zylinders  $K$  und  $K_g$  aus Gleichung 3.16 in Steifigkeitsmatrizen reduzierter Größe umformen, wodurch die Lösung des Eigenwertproblems beschleunigt werden kann.

### Zusammenfassung

Die Wahl des Metamodelltyps ist ein Zielkonflikt zwischen Modellflexibilität und Erstellungsaufwand. Dieser Zielkonflikt kann zum Teil in der Phase der konzeptuellen Metamodellerstellung bearbeitet werden, indem anwendungsbezogen die nötige Flexibilität des Modells geschätzt wird. Polynomielle Modelle können diese Flexibilität nur über einen übergeordneten Optimierungsschritt von  $m$  bewerkstelligen. Auf der anderen Seite ist es mit Gauß'schen Prozessen wie RBF und Kriging möglich, die Modellflexibilität optimal einstellen zu lassen, was Rasmussen [RW06, Kap. 1, Kap. 5.4.2] darlegt. POD wird hier nicht verwendet, da mit der Balkendurchbiegung und der Last des ersten Beulens jeweils skalare Werte anstelle vektorieller Werte abgebildet werden sollen.

Daher wird in dieser Arbeit Kriging als Metamodellmethode verwendet. Wie im Folgenden Abschnitt gezeigt wird, kann es die Modellflexibilität in einem Optimierungsschritt auf die Zielfunktion einstellen. Für das in Kapitel 3 vorgestellte nicht-lineare und multimodale Stabilitätsproblem wird die Metamodellflexibilität des Kriging als ausreichend angenommen. Es wird erwartet, dass die Parameter des Stabilitätsproblems stark unterschiedliche Sensitivitäten aufweisen. Daher kann sich die Fähigkeit des Kriging, den Einfluss der Parameter variabel zu wichten als vorteilhaft herausstellen und eine Überanpassung des Modells vermeiden.

ANNs kommen in dieser Arbeit nicht zum Einsatz. Sie sind ähnlich wie Kriging in der Lage, die Modellflexibilität selbstständig einzustellen und können ihre Eingangsparameter wichten. Damit ANNs ihre Vorteile ausspielen können, muss eine passende Architektur gewählt und ein Training auf einem großen Datensatz durchgeführt werden. Für die in dieser Arbeit zugrunde liegende Datenmenge im vierstelligen Bereich wird erwartet, dass die zusätzlichen Fähigkeiten von ANNs gegenüber Kriging für das Stabilitätsproblem nicht notwendig sind, wodurch der Zielkonflikt zwischen Modellflexibilität und Modellerstellungsaufwand zu Gunsten des

geringeren Modellerstellungsaufwandes beim Kriging entschieden wird.

### 4.4.4. Überblick Multilevel-Metamodelle

Peherstorfer und Willcox [PWG18] klassifizieren Strategien zur Management von Modellen mit mehreren Genauigkeitsstufen in *Modelladaption*, *Modellfusion* und *Modellfilterung*. In der Modelladaption wird ein Basismodell oder Basismetamodell sukzessive mit Stützpunkten eines Zielmodells erweitert, was beispielsweise in Optimierungen Verwendung finden kann. Ein mögliches Verfahren hierfür wird in Abschnitt 4.8 beschrieben. Mit der Modellfusion werden Informationen des Basis- und Zielmodells verwendet, um eine gemeinsame Repräsentation des zu betrachtenden Kontextes herzustellen. Modellfilterungen verwenden Informationen des Basismodells als Entscheidungsinstanz, die basierend auf einer festgelegten Bedingung Zielmodellevaluationen auslöst. Hiermit kann beispielsweise ein interessanter Suchbereich eingegrenzt werden. Im Folgenden werden Methoden zur Modellfusion und in Abschnitt 4.8 eine Methode zur Modelladaption vorgestellt.

Um für Hypothese 1 Metamodelle über wenige Stützpunkte von sehr aufwändigen Modellen mit einfacheren Modellen zu verbessern, liegt es nahe, Korrekturfunktionen zwischen den Modellen einzuführen und somit ein Multilevel-Metamodell einzuführen. Hierfür werden Möglichkeiten gesucht, ein Metamodell auf dem einfacheren Level über eine Korrekturfunktion und Stützstellen des genaueren Levels zu verbessern. Das einfache Modell wird hier Basismodell und das als genauer angesehenes Modell als Zielmodell benannt. Genauso wird aus ersterem das Basismetamodell und aus letzterem das Zielmetamodell erstellt. Viana [VSBT14, Kap. 3] gibt für Multilevel-Metamodelle einen Überblick.

Als einfachste Variante kann ausgehend von einem Basismetamodell der Unterschied zu einem Zielmodellstützpunkt über ein Offset modelliert werden. Das kann als ein lokales Multilevel-Metamodell angesehen werden, was beispielsweise Chang [CHGK93] beschreibt.

Eine andere einfache Form über Korrekturparameter  $a_0$  und  $a_1$  ist die lineare Korrekturfunktion

$$\hat{y} = a_0 + a_1 f(x) \quad (4.39)$$

oder auch multiplikative Funktionen

$$\hat{y} = a_0 f(x)^{a_1}, \quad (4.40)$$

wobei  $f(x)$  das Basismodell oder Basismetamodell darstellt und die Werte der Korrekturpara-

meter aus einer Optimierung resultieren.

Im Gegensatz zu den bisherigen Ansätzen, verwendet Choi [CAK<sup>+</sup>04] und [CAK05] ein Krigingmodell, das den Fehler zwischen Basis- und Zielmodell approximiert und additiv zum Basismetamodell hinzugefügt wird. Damit wird eine globale Korrektur des Metamodells erreicht. Es existieren auch hybride additiv/multiplikative Varianten wie sie Gano [GSR04] vorstellen. Diese additiven und multiplikativen Verfahren werden im Englischen auch als „data fusion“ (dt. Datenzusammenführung) [TGL05] beschrieben. „Data fusion“ wird in der Literatur jedoch weiter gefasst, in dem unterschiedliche Signale verarbeitet werden, die nicht zwingend genauere und ungenauere Informationen enthalten müssen.

Von Kennedy und O’Hagan [KO00] wurde ein später als co-Kriging eingeordnetes Verfahren für Variable-Fidelity Models (VFM) vorgestellt, bei dem zur Erstellung des Korrekturmodells die Stützpunkte und Kovarianzmatrix<sup>3</sup> gemeinsam berücksichtigt werden. Dieses Verfahren wurde von Forrester [FSK07] und Han [HZG12] um jeweils bestimmte Aspekte erweitert.

Als weitere Multilevel-Metamodellmethode demonstriert Han [HG12] das hierarchische Kriging. Diese Methode wird in Abschnitt 4.6 detailliert vorgestellt.

Zusammenfassend sind additive und multiplikative Methoden als vergleichsweise robust anzusehen. Jedoch ist ihre Approximationsgüte nach Han [HG12] im Vergleich zu co-Kriging und hierarchischem Kriging deutlich geringer. Der Modellansatz des hierarchischen Krigings ist im Vergleich zum co-Kriging einfacher bei ähnlicher Approximationsgüte für das von Han betrachtete aerodynamische Problem. Zusätzlich ist nach Han die Fehlerschätzung über den mittleren quadratischen Fehler (engl.  $e_{MSE}$ ) des hierarchischen Kriging robuster als die des Co-Kriging. Courrier [CBS16] vergleicht additive Multilevel-Metamodellmethoden mit co-Kriging und hierarchischem Kriging und bestätigen die obige Einschätzung anhand von mehreren mechanischen Problemstellungen mit Kontakt und Reibung bei niedriger Parameteranzahl ( $d \leq 3$ ).

## 4.5. Kriging

Kriging ist nach Daniel Krige [Kri51] benannt, der es in der Geostatistik zur Approximation von Eigenschaften in Gesteinsschichten verwendet. Das Verfahren wurde von Matheron [Mat63] weiter formalisiert. Die Anwendung von Kriging als Metamodell für Computersimulationen wurde mit Sacks [SWMW89] bekannt.

Die folgende Herleitung des Krigingverfahrens ist hauptsächlich aus Sauerbrei [SF13] entnom-

---

<sup>3</sup>Für Kriging ist dies in normierter Form als Korrelationsmatrix im folgenden Abschnitt beschrieben.

men und mit Elementen aus Lovhagen [LNS02a] erweitert. Diese beiden Dokumente basieren auf der Veröffentlichung von Sacks, haben jedoch eine umfassendere Herleitung.

### 4.5.1. Modellannahmen

#### Modellansatz

Kriging basiert auf der Annahme, dass die zu approximierende Funktion  $y(x)$  von einem Regressionsmodell  $f(x) \cdot \beta$  ausschließlich um einen stochastischen Fehler  $\epsilon(x)$

$$y: \mathbb{R}^d \supset \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot \beta + \epsilon(x), \quad (4.41)$$

abweicht. Als Krigingmodell soll daraus der beste, lineare und erwartungstreue Schätzer  $\hat{y}$  (engl. Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)) bestimmt werden.

Drückt man den Kriging-Ansatz 4.41 an den diskreten Stützpunkten aus, so ist die Matrix der Regressionsvektoren

$$F = (f(x^1)^T, \dots, f(x^n)^T)^T. \quad (4.42)$$

Die Fehlerwerte sind

$$\Sigma = (\epsilon(x^1), \dots, \epsilon(x^n)). \quad (4.43)$$

Damit ergibt sich der Zusammenhang zu den Stützwerten mit

$$Y = F \cdot \beta + \Sigma. \quad (4.44)$$

#### Regressionsmodell

Das Regressionsmodell  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$  mit den dazugehörigen Regressionsparametern  $\beta \in \mathbb{R}^{p+1}$  wird meist entweder als konstante Regression (Ordinary Kriging) mit

$$p = 0, \quad f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 \quad (4.45)$$

oder als lineare Regression (Universal Kriging) mit

$$p = d, \quad f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, \quad x = (x_1, \dots, x_d)^T \mapsto (1, x_1, \dots, x_d)^T \quad (4.46)$$

modelliert.

### Stochastisches Modell

Der stochastische Fehler  $\epsilon(x)$  wird so modelliert, dass er um die Regressionsfunktion schwankt und sein Erwartungswert an jeder Stelle Null ergibt.

$$E[\epsilon(x)] = 0, \quad \forall x \in \tilde{\Omega} \quad (4.47)$$

Die Varianz aus Gleichung 4.6 von  $\epsilon(x)$  wird mit

$$\begin{aligned} \text{Var}(\epsilon(x)) &= E[(\epsilon(x) - E[\epsilon(x)])^2] = E[\epsilon(x)^2] - \underbrace{E[\epsilon(x)]^2}_{=0} \\ &= E[\epsilon(x)^2] = \sigma^2, \quad \forall x \in \tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (4.48)$$

als stationär<sup>4</sup> angenommen.

Damit ergibt sich für die Kovarianz der Zufallsfehler  $\epsilon(x)$  an den Stellen  $x, z \in \tilde{\Omega}$  durch Gleichung 4.8, 4.47 und 4.48 mit

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\epsilon(x), \epsilon(z)) &= E[\epsilon(x)\epsilon(z)] - \underbrace{E[\epsilon(x)]}_{=0} \underbrace{E[\epsilon(z)]}_{=0} \\ &= E[\epsilon(x)\epsilon(z)], \quad \forall x, z \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dies liefert über 4.10 den Zusammenhang für die Korrelation

$$\sigma^2 \cdot \text{Cor}(\epsilon(x), \epsilon(z)) = E[\epsilon(x)\epsilon(z)], \quad \forall x, z \in \tilde{\Omega}. \quad (4.50)$$

### Korrelationsmodellierung

Im weiteren Verlauf muss der Erwartungswert zweier Fehlergrößen  $E[\epsilon(x)\epsilon(z)]$  ermittelt werden. Das kann durch 4.50 über das Modellieren der Korrelation beschrieben werden, was im folgenden Unterabschnitt 4.5.2 beschrieben wird.

---

<sup>4</sup>Als stationär werden stochastische Prozesse bezeichnet, die einen konstanten Erwartungswert und eine invariante Varianz bezüglich Verschiebungen im Entwurfsraum aufweisen.

## Krigingschätzer

Wie bei RBFs basiert der Krigingschätzer  $\hat{y}$  auf einem linearen Ansatz, der mit 4.44 erweitert werden kann.

$$\hat{y}(x) = \omega^T(x) \cdot Y \quad (4.51)$$

$$= \omega^T(x) \cdot (F \cdot \beta + \Sigma) \quad (4.52)$$

mit den Gewichten  $\omega^T(x) = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T(x)$ .

### 4.5.2. Modellierung der Korrelation

Die Modellierung der Korrelation soll den Erwartungswert zweier Fehlergrößen  $E[\epsilon(x)\epsilon(z)]$  beschreiben, indem die Annahme der räumlichen Ähnlichkeit in das Korrelationsmodell integriert wird. Ziel ist es, ein Korrelationsmodell  $\mathcal{R}(\theta, x, z)$  zu erhalten, das Stützstellen mit geringem räumlichen Abstand höher bewertet als solche mit hohem Abstand. In der Geostatistik wird der Variogrammansatz zur Korrelationsmodellierung verwendet (siehe Cressie [Cre93]). Für Computersimulationen verwendet Sacks stationäre Korrelationsmodelle, für die  $\mathcal{R}(\theta, x, z) = \mathcal{R}(\theta, |x - z|)$  gilt.

Eine von Sacks vorgestellte Form ist das exponentielle Modell

$$\mathcal{R}_{Exp}(\theta, |x - z|) = \exp\left(\sum_{j=1}^d -\theta_j |x_j - z_j|\right) \quad (4.53)$$

und das Gauß'sche Modell

$$\mathcal{R}_{Gauss}(\theta, |x - z|) = \exp\left(\sum_{j=1}^d -\theta_j |x_j - z_j|^2\right). \quad (4.54)$$

Eine andere Klasse von Korrelationsmodell ist ein parametrisches kubisches Polynom, für das Lophaven [LNS02b] Parameter definiert.

$$\mathcal{R}_{Cubic}(\theta, |x - z|) = \prod_{j=1}^d 1 - 3\xi_j^2 + 2\xi_j^3, \quad \xi_j = \min\{1, \theta_j |x_j - z_j|\} \quad (4.55)$$

In Abbildung 4.7 a) werden die vorgestellten Korrelationsmodelle in Abhängigkeit von  $|x_j - z_j|$

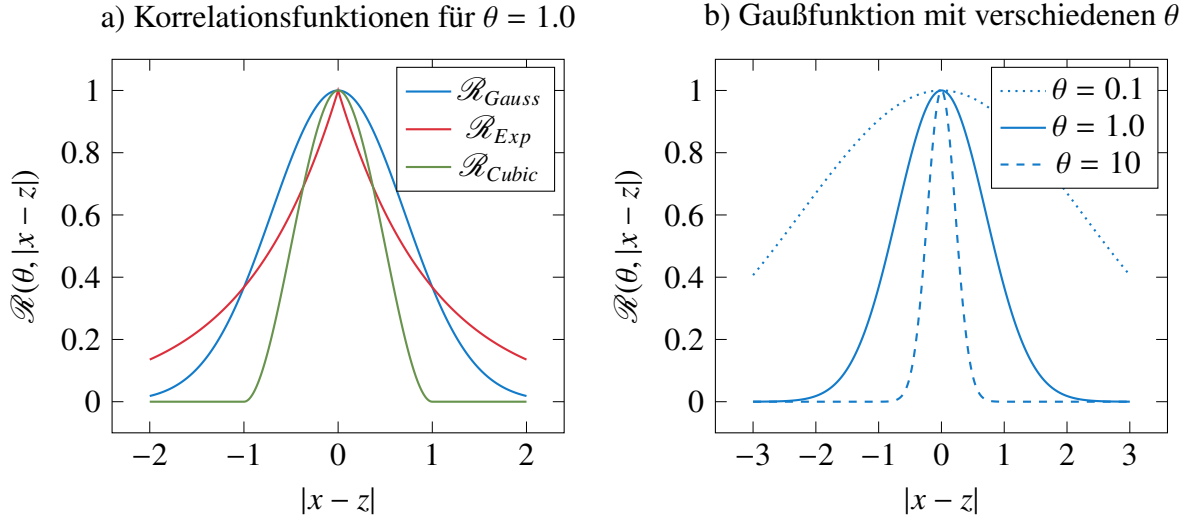


Abbildung 4.7.: a) Veranschaulichung der verschiedenen Korrelationsmodelle für  $\theta = 1.0$  und  
b) Auswirkung verschiedener  $\theta$  auf die Korrelationsmodelle am Beispiel der Gauß-Funktion  $\mathcal{R}_{Gauss}$

für  $\theta = 1.0$  veranschaulicht. Alle Modelle erfüllen die Bedingung, dass für kleiner werdende  $|x_j - z_j|$  die Korrelation streng monoton und stetig abnimmt. Das Gauß'sche-Modell und das kubische Modell weisen zusätzlich einen stetigen Gradienten an der Stelle  $|x_j - z_j| = 0$  auf, was für das exponentielle Modell nicht zutrifft. Letzteres beinhaltet damit die Annahme, dass benachbarte Punkte weniger korrelieren im Vergleich zu dem Plateau, welches das Gauß'sche-Modell und das kubische Modell nahe 0 ausbilden. Für das kubische Modell gilt zusätzlich, dass die Korrelation außerhalb von  $\pm 1/\theta$  Null ist, wohingegen die anderen Modelle für  $|x_j - z_j| \rightarrow \infty$  asymptotisch gegen Null konvergieren.

Die Hyperparameter  $\theta$  wirken als Distanzgewichte, die die Korrelationsbreite der Funktion bestimmen. Dies ist in Abbildung 4.7 b) beispielhaft für das Gauß'sche-Modell dargestellt. Für zwei feste, voneinander unterschiedliche Stützstellen  $x$  und  $z$  liefern steigende  $\theta$  eine sinkende Korrelation. Umgekehrt erhöht sich die Korrelationsbreite bei sinkenden  $\theta$ , was zu höheren Korrelationswerten führt. Sind die Punkte  $x$  und  $z$  koinzident, so gilt für die Korrelation  $\mathcal{R}(\theta, |x - z|) = 1$ .

Aus den Korrelationsmodellen kann die Korrelationsmatrix

$$R =: (\mathcal{R}(\theta, x^i, z^k)) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(\theta, x^1, z^1) & \cdots & \mathcal{R}(\theta, x^1, z^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}(\theta, x^n, z^1) & \cdots & \mathcal{R}(\theta, x^n, z^n) \end{pmatrix}, \quad i, k = 1 \dots, n \quad (4.56)$$

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

erstellt werden, die die Korrelation aller Stützstellen untereinander beschreibt. Sie ist symmetrisch positiv definit. Im Folgenden wird der Korrelationsvektor

$$r(x) =: (\mathcal{R}(\theta, x^i, x)) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(\theta, x^1, x) \\ \vdots \\ \mathcal{R}(\theta, x^n, x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.57)$$

genutzt, der im Folgenden zur Modellierung der Korrelation eines beliebigen Punkts in Bezug zu den Metamodellstützstellen verwendet wird.

Die Auswirkung der Wahl von  $\theta$  ist in Abbildung 4.8 a) bis e) basierend auf der Testfunktion (Forrester [FSK08])

$$y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (6x - 2)^2 \cdot \sin(12x - 4) \quad (4.58)$$

dargestellt. Zusätzlich ist das blaue Krigingmodell in Abhängigkeit von  $\theta$  abgebildet, das auf 11 gleichmäßig verteilten Stützpunkten basiert. Große  $\theta$  weisen kleine Korrelationsbreiten auf, was vor allem in Abbildung 4.8 a) zu sehen ist. Das Krigingmodell unterscheidet sich nur in der nahen Umgebung der Stützstellen von dem konstanten Regressionsmodell. An den Stützpunkten wird die Bedingung aus Gleichung 4.52 erfüllt, dass das Krigingmodell die Stützpunkte wiedergibt. Die Stützpunkte haben in a) somit einen sehr lokalen Einfluss. Außerhalb der nahen Umgebung einer Stützstelle ist die Korrelation nahe Null und damit deren Einfluss ebenso nahe Null. Es erfolgt jedoch kein gleichmäßiger Übergang von einem Stützpunkt zum nächsten. Mit sinkendem  $\theta$  von a) bis d) erhöht sich die Korrelationsbreite, wodurch die Testfunktion in Abbildung d) deutlich besser als auf den vorherigen Abbildungen approximiert wird.

Sinkt  $\theta$  wie in e) dargestellt weiter, so erhöht sich der Einfluss der Stützpunkte untereinander. Beim Grenzfall  $\theta = 0$  ist die Korrelationsmatrix an jeder Stelle 1, also  $R = \mathbf{1}$ . Damit ist  $R$  singular, nicht invertierbar und die modifizierte Korrelationsmatrix  $\tilde{R}$  in Gleichung 4.75 ist ebenso nicht invertierbar. Dies äußert sich für  $\theta \rightarrow 0$  mit  $\theta > 0$  in numerischen Ungenauigkeiten, die in e) bereits für  $\theta = 0.1$  erkennbar sind. Mit sinkendem  $\theta$  steigt dabei die Kondition  $\kappa(\tilde{R})$  an. Auch eine hohe Stützstellenanzahl oder eine lokale Verdichtung von Stützstellen können zu einer ungünstigen Matrixkondition führen. Daher empfiehlt es sich nach Hoerl [HK70] und Tikhonov [TA77] eine Regularisierung der Korrelationsmatrix durch einen Regularisierungsparameter  $\lambda$  über



#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

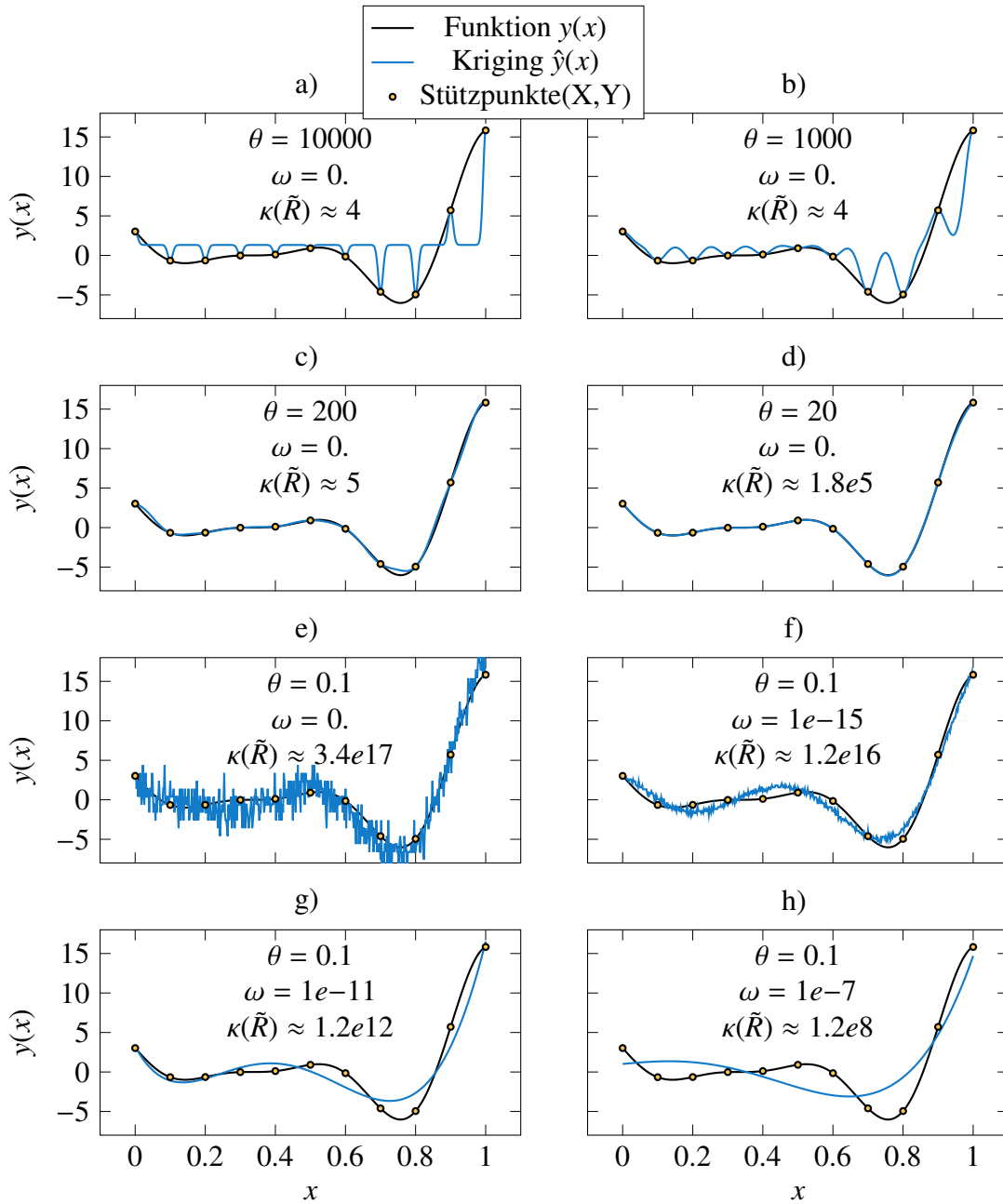


Abbildung 4.8.: Abbildung a) bis e) zeigen das Krigingmodell für die Funktion 4.58 und veranschaulichen die Abhängigkeit vom Hyperparameter  $\theta$  mit Gauß'scher Korrelationsfunktion 4.54 und konstanter Regression  $f(x)$  aus Gleichung 4.45. Für kleine  $\theta$  wird die Kondition  $\kappa(\tilde{R})$  der modifizierten Korrelationsmatrix  $\tilde{R}$  sehr hoch wie in Abbildung e). In Abbildung f) bis h) wird eine Regularisierung von  $R$  der Höhe  $\lambda$  vorgenommen, um  $\kappa(\tilde{R})$  zu reduzieren. Dies überführt das interpolierende Krigingmodell in ein approximierendes, in dem die Stützpunkte vom Krigingmodell nicht exakt getroffen werden. Diese Abbildung ist eine Erweiterung aus Sauerbrei und Freund [SF13].

$$R_{\text{regularisiert}} = R_{\text{nicht\_regularisiert}} + \lambda I \quad (4.59)$$

vorzunehmen, wobei  $I$  die Einheitsmatrix ist. Der Regularisierungsparameter kann entweder in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit bei  $\lambda \approx 1e-15$  sein oder er kann in der Optimierung in Unterabschnitt 4.5.4 optimal geschätzt werden. Sauerbrei [SF13, Kap. 3.2.3] diskutiert zusätzlich mögliche Schätzer für den Approximationsfehler, der durch die Regularisierung entsteht. Abbildung 4.8 f) bis h) veranschaulicht daher die Auswirkung des Regularisierungsparameters  $\lambda$  auf den schlecht-konditionierten Fall aus Abbildung 4.8 e) bei konstantem  $\theta = 0.1$ . Mit steigendem Regularisierungsparameter wird die Kondition  $\kappa(\tilde{R})$  gesenkt und die numerischen Ungenauigkeiten werden reduziert. Andererseits ist zu erkennen, dass sich das Krigingmodell mit steigenden  $\lambda$  immer mehr von den Stützpunkten entfernt. Dieser Effekt überführt das interpolierende Krigingmodell in ein approximierendes. Das kann genutzt werden, um Unstetigkeiten der Ausgangsfunktion auszugleichen.

Eine Ursache von Unstetigkeiten können beispielsweise verrauschte Eingabedaten sein. Auch die inverse simultane Vektoriteration kann Unstetigkeiten hervorrufen. Dies wird in Unterabschnitt 3.4.5 auf Seite 36 und Unterabschnitt 3.5.5 auf Seite 41 quantifiziert.

Viele Problemstellungen haben unterschiedlich starke Korrelationen in jede Parameterrichtung und sind in dieser Beziehung anisotrop. Durch die Vergabe eines Distanzgewichts  $\theta_j$  für jeden Parameter, kann diese Anisotropie modelliert werden. Die Distanzgewichte wirken somit als ein Indikator für die Wichtigkeit eines Parameters. Sie gilt es optimal einzustellen, was in Unterabschnitt 4.5.4 beschrieben ist.

### 4.5.3. Ermittlung des Krigingschätzers

Die Erwartungstreue des Krigingschätzers wird erzwungen, wenn der Erwartungswert des Approximationsfehlers  $\hat{y}(x) - y(x)$  an jeder Stelle 0 liefert.

$$\begin{aligned} 0 &= E[\hat{y}(x) - y(x)] \\ &= E[\omega^T(x) \cdot (F \cdot \beta + \Sigma) - f(x) \cdot \beta + \epsilon(x)] \\ &= E[\omega^T(x) \cdot \Sigma + (\omega^T(x) \cdot F - f(x)) \cdot \beta - \epsilon(x)] \\ &= \omega^T(x) \cdot \underbrace{E[\Sigma]}_{=0} + (\omega^T(x) \cdot F - f(x)) \cdot \beta - \underbrace{E[\epsilon(x)]}_{=0} \\ &= (\omega^T(x) \cdot F - f(x)) \cdot \beta. \end{aligned} \quad (4.60)$$

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

Damit ist die Bedingung für die Erwartungstreue

$$f(x) = \omega^T(x) \cdot F. \quad (4.61)$$

Die Gewichte  $\omega^T(x)$  sollen so eingestellt werden, dass der mittlere quadratische Fehler ( $e_{MSE}$ ) im gesamten Entwurfsraum minimiert wird. Der  $e_{MSE}$  ergibt sich durch

$$\begin{aligned} MSE(\hat{y}(x), y(x)) &= E[(\hat{y}(x) - y(x))^2] \\ &= E\left[\left(\omega^T(x) \cdot (F \cdot \beta + \Sigma) - f(x) \cdot \beta + \epsilon(x)\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\omega^T(x) \cdot \Sigma + \underbrace{(\omega^T(x) \cdot F - f(x)) \cdot \beta}_{=0, \text{ wegen 4.60}} - \epsilon(x)\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\omega^T(x) \cdot \Sigma - \epsilon(x)\right)^2\right] \\ &= E\left[\omega^T(x) \Sigma \Sigma^T \omega(x) - 2\omega^T(x) \Sigma \epsilon(x) + \epsilon(x)^2\right] \\ &= \omega^T(x) E[\Sigma \Sigma^T] \omega(x) - 2\omega^T(x) E[\Sigma \epsilon(x)] + \underbrace{E[\epsilon(x)^2]}_{=\sigma^2, \text{ wegen 4.48}} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Mit 4.49 folgt für

$$\begin{aligned} E[\Sigma \Sigma^T] &= E\left[\begin{pmatrix} \epsilon(x^1) \\ \vdots \\ \epsilon(x^n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon(x^1) & \dots & \epsilon(x^n) \end{pmatrix}\right] \\ &= E\left[\begin{pmatrix} \epsilon(x^1)\epsilon(x^1) & \dots & \epsilon(x^1)\epsilon(x^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon(x^n)\epsilon(x^1) & \dots & \epsilon(x^n)\epsilon(x^n) \end{pmatrix}\right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$= \begin{pmatrix} E[\epsilon(x^1)\epsilon(x^1)] & \dots & E[\epsilon(x^1)\epsilon(x^n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[\epsilon(x^n)\epsilon(x^1)] & \dots & E[\epsilon(x^n)\epsilon(x^n)] \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

$$= \left(Cov(\epsilon(x^i)\epsilon(x^k))\right)_{i,k=1,\dots,n} \quad (4.65)$$

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

$$= \sigma^2 \cdot \underbrace{\left( \text{Cor}(\epsilon(x^i)\epsilon(x^k)) \right)_{i,k=1,\dots,n}}_{=:R} \quad (4.66)$$

und für

$$\begin{aligned} E[\Sigma \epsilon(x)] &= E \left[ \begin{pmatrix} \epsilon(x^1) \\ \vdots \\ \epsilon(x^n) \end{pmatrix} \cdot \epsilon(x) \right] = E \left[ \begin{pmatrix} \epsilon(x^1)\epsilon(x) \\ \vdots \\ \epsilon(x^n)\epsilon(x) \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} E[\epsilon(x^1)\epsilon(x)] \\ \vdots \\ E[\epsilon(x^n)\epsilon(x)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(\epsilon(x^1), \epsilon(x)) \\ \vdots \\ \text{Cov}(\epsilon(x^n), \epsilon(x)) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \underbrace{\left( \text{Cor}(\epsilon(x^i)\epsilon(x)) \right)_{i=1,\dots,n}}_{=:r(x)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Die Matrix  $R$  beschreibt dabei die Korrelationen der Stützstellen untereinander, während der Vektor  $r(x)$  die Korrelation der Stützstellen bezüglich  $x$  liefert.

Wird 4.66 und 4.67 in die Gleichung für den  $e_{MSE}$  4.62 eingesetzt, folgt

$$MSE(x) = \sigma^2 \left( 1 + \omega^T(x)R\omega(x) - 2\omega^T(x)r(x) \right), \quad (4.68)$$

was für die Minimierung des  $e_{MSE}$  zu dem Optimierungsproblem mit der Nebenbedingung aus 4.61

$$\begin{aligned} \min_{\omega(x)} \sigma^2 \left( 1 + \omega^T(x)R\omega(x) - 2\omega^T(x)r(x) \right) \\ \text{Nebenbedingung } f(x) = \omega^T(x)F \end{aligned} \quad (4.69)$$

führt. Über die Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren  $\phi(x)$  kann die Nebenbedingung in das unrestringierte Optimierungsproblem

$$\min_{\omega(x)} \sigma^2 \left( 1 + \omega^T(x)R\omega(x) - 2\omega^T(x)r(x) \right) + \left( \omega^T(x)F - f(x) \right) \phi(x) \quad (4.70)$$

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

überführt werden.  $\phi \in \mathbb{R}^{p+1}$  sind dabei die Lagrange-Multiplikatoren, die neben  $\omega$  bestimmt werden müssen. Mit Differentiation nach  $\omega$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \omega} & \left( \sigma^2 \cdot \left( 1 + \omega^T(x) R \omega(x) - 2 \omega^T(x) r(x) \right) + \left( \omega^T(x) F - f(x) \right) \phi(x) \right) \\
 &= \sigma^2 (2R\omega(x) - 2r(x)) + F\phi(x) \\
 &= 2\sigma^2 \left( R\omega(x) - r(x) + F \frac{\phi(x)}{2\sigma^2} \right) \\
 &= 2\sigma^2 \left( R\omega(x) - r(x) + F\tilde{\phi}(x) \right)
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

mit  $\tilde{\phi}(x) =: \phi(x)/2\sigma^2$ . Die Hessematrix lautet

$$Hesse_{\omega} \left( \sigma^2 \left( 1 + \omega^T(x) R \omega(x) - 2 \omega^T(x) r(x) \right) + \left( \omega^T(x) F - f(x) \right) \phi(x) \right) = 2\sigma^2 R. \tag{4.72}$$

Die Korrelationsmatrix  $R$  wird als positiv definit angenommen, wodurch sich durch  $2\sigma^2 R$  ein Minimum an dieser Optimalstelle befindet. Sie ist an der Nullstelle des Gradienten mit

$$0 = 2\sigma^2 \left( R\omega(x) - r(x) + F\tilde{\phi}(x) \right). \tag{4.73}$$

gegeben. Bezieht man die Nebenbedingung 4.61 in 4.88 ein, erhält man das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix}}_{=: \tilde{R}} \begin{pmatrix} \omega(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x) \\ f^T(x) \end{pmatrix}. \tag{4.74}$$

Mithilfe des Schurkomplements kann  $\tilde{R}$

$$\tilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} R & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} - R^{-1} F (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} & R^{-1} F (F^T R^{-1} F)^{-1} \\ (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} & -(F^T R^{-1} F)^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

invertiert und damit 4.74 in Gleichung 4.51 eingesetzt werden. Der Krigingschätzer ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(x) &= \omega^T(x)Y \\
 &= \begin{pmatrix} r(x) \\ f^T(x) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} r(x) \\ f^T(x) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R^{-1} - R^{-1}F(F^T R^{-1}F)^{-1}F^T R^{-1} & R^{-1}F(F^T R^{-1}F)^{-1} \\ (F^T R^{-1}F)^{-1}F^T R^{-1} & -(F^T R^{-1}F)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} r(x) \\ f^T(x) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R^{-1}Y - R^{-1}F(F^T R^{-1}F)^{-1}F^T R^{-1}Y \\ (F^T R^{-1}F)^{-1}F^T R^{-1}Y \end{pmatrix} \\
 &= r^T(x)R^{-1}(Y - F \underbrace{(F^T R^{-1}F)^{-1}F^T R^{-1}Y}_{=: \beta_0}) + f(x) \underbrace{(F^T R^{-1}F)^{-1}F^T R^{-1}Y}_{=: \beta_0} \\
 &= f(x)\beta_0 + r(x)^T \underbrace{R^{-1}(Y - F\beta_0)}_{=: v} \\
 &= f(x)\beta_0 + r(x)^T v.
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\tag{4.77}$$

Hierbei ist 4.76 die in der Literatur gebräuchlichste Formulierung für den Krigingschätzer. Die Vektoren

$$\beta_0 =: (F^T R^{-1}F)^{-1}F^T R^{-1}Y \tag{4.78}$$

und

$$v =: R^{-1}(Y - F\beta_0) \tag{4.79}$$

sind unabhängig von  $x$  und können damit a priori ermittelt werden. Damit müssen lediglich  $f(x)$  und  $r(x)$  für jede Auswertung des Krigingschätzers ermittelt und mit den Vektoren  $\beta_0$  und  $v$  multipliziert werden.

Nach Sacks [SWMW89] ist  $\beta_0$  das Optimum des verallgemeinerten Regressionsproblems bezüglich des mittleren quadratischen Fehlers.

#### 4.5.4. Maximum Likelihood Optimierung der Kriging-Hyperparameter

Um den Krigingschätzer aus Gleichung 4.76 verwenden zu können, müssen die Distanzgewichte  $\theta$  der gewählten Korrelationsfunktion  $\mathcal{R}$  aus entweder 4.53, 4.54 oder 4.55 eingestellt werden.

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

Um die bisher unbekannten Hyperparameter  $\theta$ ,  $\lambda$  und  $\sigma$  zu bestimmen, wird die Maximum-Likelihood-Schätzung [Kre05, Kap. 4.2] (engl. Maximum Likelihood Estimation (MLE)) verwendet. Für Kriging wird angenommen, dass der stochastische Fehler  $\epsilon(x)$  aus 4.41 normalverteilt<sup>5</sup> ist und die Beobachtungen  $Y$  über die Korrelationsmatrix  $R$  untereinander korrelieren. Jeder Variation der Hyperparameter ordnet die Likelihood-Funktion  $L$  die Wahrscheinlichkeit zu, mit der sie die Beobachtungen erklären können. Sie ist durch

$$L(\theta, \lambda, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n \cdot |R|}} \exp\left(-\frac{(Y - E[Y])^T R^{-1} (Y - E[Y])}{2\sigma^2}\right) \quad (4.80)$$

definiert, wobei  $|R|$  die Determinante von  $R$  ist. Aus 4.44 ergibt sich  $E[Y] = F\beta$ , da der Fehler mit  $E[\Sigma] = 0$  erwartungstreu ist. Der Parameter  $\theta$  ist über 4.56 in der obigen Gleichung enthalten und  $\lambda$  über 4.59. Maximiert man die Likelihood-Funktion, erhält man die Hyperparameter, für die es am wahrscheinlichsten ist, die beobachteten Stützpunkte zu beschreiben. Die Differentiation von  $L$  ist einfacher, wenn man den natürlichen Logarithmus bildet, was durch die strenge Monotonie des Logarithmus die gleiche Optimalstelle liefert. Daraus formuliert sich mit der In-Likelihood-Funktion das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_{\theta, \lambda, \sigma} \ln L(\theta, \lambda, \sigma^2) = \\ \max_{\theta, \lambda, \sigma} \left[ -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(|R|) - \frac{1}{2\sigma^2} (Y - F\hat{\beta})^T R^{-1} (Y - F\hat{\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Für feste  $\theta$  und  $\lambda$  kann die partielle Ableitung für  $\sigma^2$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\theta, \lambda, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{(Y - F\hat{\beta})^T R^{-1} (Y - F\hat{\beta})}{2(\sigma^2)^2} \quad (4.82)$$

gebildet und nach Null gelöst werden

$$\hat{\sigma}^2(\theta, \lambda) = \frac{(Y - F\hat{\beta})^T R^{-1} (Y - F\hat{\beta})}{n}, \quad (4.83)$$

um den Schätzer  $\hat{\sigma}^2(\theta, \lambda)$  als potentielle Extremalstelle zu erhalten. Die zweite Ableitung ist

---

<sup>5</sup>Die Annahme einer Normalverteilung kann mithilfe des p-Wertes aus dem Shapiro-Wilk-Test überprüft werden. Eine nicht normalverteilte Fehlermenge kann zu einer schlechten Approximation führen. Nach Martin [MS05] liefert ein p-Wert über 0.5 einen moderat guten Hinweis auf eine Normalverteilung und p-Werte über 0.75 sind starke Anzeichen für eine Normalverteilung. Ist der p-Wert niedriger, kann alternativ die in Unterabschnitt 4.7.1 beschriebene aber aufwändigere Kreuzvalidierung zur Bestimmung der Hyperparameter verwendet werden, was auch Forrester [FSK08, Kap 2.1.2] darlegt.

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

$$\frac{\partial^2}{(\partial \sigma^2)^2} \ln L(\theta, \lambda, \sigma^2) = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{(Y - F\hat{\beta})^T R^{-1}(Y - F\hat{\beta})}{(\sigma^2)^3} \quad (4.84)$$

und für  $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2(\theta, \lambda)$  ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial \sigma^2)^2} \ln L(\theta, \lambda, \sigma^2 = \hat{\sigma}^2) &= -\frac{n^3}{2((Y - F\hat{\beta})^T R^{-1}(Y - F\hat{\beta}))^2} + \frac{n^3}{((Y - F\hat{\beta})^T R^{-1}(Y - F\hat{\beta}))^2} \\ &= \frac{n^3}{2((Y - F\hat{\beta})^T R^{-1}(Y - F\hat{\beta}))^2} < 0, \quad \forall \theta, \lambda \end{aligned} \quad (4.85)$$

da  $R$  und somit auch  $R^{-1}$  symmetrisch positiv definit ist. Damit handelt es sich bei  $\hat{\sigma}^2(\theta, \lambda)$  um ein Maximum.

Durch Einsetzen von  $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2(\theta, \lambda)$  in Gleichung 4.81 und Herauslassen der konstanten Anteile vereinfacht sich das Optimierungsproblem zu

$$\max_{\theta, \lambda} \ln L(\theta, \lambda) = \max_{\theta, \lambda} -\frac{n}{2} \ln(\hat{\sigma}^2(\theta, \lambda)) - \frac{1}{2} \ln(|R(\theta, \lambda)|). \quad (4.86)$$

Die Parameter  $\theta$  und  $\lambda$  können bei den verwendeten Korrelationsfunktionen nicht algebraisch ermittelt werden. Daher müssen diese Parameter über numerische Optimierungsverfahren ermittelt werden. Dieser Schritt ist der numerisch aufwändigste, da die Ermittlung von  $L(\theta, \lambda)$  in jedem Optimierungsschritt einen Aufwand von  $\mathcal{O}(n^3)$  bedeutet. Damit ist eine effiziente Wahl der Optimierungsstrategie essentiell zur Erstellung von Metamodellen mit vielen Stützpunkten.

Nach Martin [MS05] kann dieses Optimierungsproblem in Abhängigkeit von der Korrelationsfunktion und den Stützpunkten auch mehrere Optima besitzen. Daher empfiehlt sich nach Forrester [FSK08] für unbekannte Probleme ein globales Optimierungsverfahren, dessen Optimum für eine genaue lokale Suche verwendet wird. Dafür wird in der Implementierung das von Price und Storn [PSL06] vorgestellte Verfahren der differentiellen Evolution als globales Optimierungsverfahren verwendet. Die lokale Optimierung wird mithilfe des L-BFGS-B-Algorithmus durchgeführt, den Bryd [BLNZ95] vorgestellt hat. Es ist ein Quasi-Newton-Verfahren, das Optimierungsprobleme mit Parametergrenzen behandeln kann. Es beruht auf dem nach seinen Autoren benannten BFGS-Algorithmus (Broyden [Bro70], Fletcher [Fle70], Goldfarb [Gol70], Shanno [Sha70]). Die Grenzen für  $\theta$  sind auf  $[10^{-3}, 10^2]$  festgelegt. Eine Ausnahme ist das kubische Regressionsmodell  $\mathcal{R}_{Cubic}$ , bei dem die obere Grenze  $10^0$  beträgt. Die Grenzen des Regularisierungsparameters  $\lambda$  sind  $[10^{-15}, 10^{-1}]$ . Durch den großen Unter-



#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

schied in den Größenordnungen zwischen unterer und oberer Grenze ist es aus numerischen Gründen sinnvoll, dem Optimierer auf dem dekadischen Logarithmus von  $\theta$  und  $\lambda$  arbeiten zu lassen. Die entsprechend angepassten Grenzen sind  $[-3, 2]$  und  $[-15, -1]$ .

Auch  $\beta$  kann im Sinne der MLE bestimmt werden, was Sauerbrei [SF13] ausführt und das gleiche Ergebnis für  $\hat{\beta}$  aus 4.78 liefert.

Neben dem reinen approximierten Funktionswert des Krigingschätzers kann auch eine Abschätzung des Vorhersagefehlers mithilfe des  $e_{MSE}$  erstellt werden. Dadurch kann zum einen die Aussagesicherheit an jeder Stelle im Entwurfsraum bestimmt werden. Zum anderen kann diese Information zur Bestimmung von Bereichen genutzt werden, die wenige Stützstellen enthalten, wodurch die Wahrscheinlichkeit einer schlechten Approximation höher ist als in anderen Bereichen. Dies wird in Abschnitt 4.8 beschrieben, um adaptiv weitere Stützstellen für das Krigingmodell zu ermitteln. Um den  $e_{MSE}$  zu ermitteln ist die Lösung für  $\omega$ , und  $\tilde{\phi}$  aus 4.74 über ihr Schur-Komplement 4.75

$$\omega(x) = R^{-1} (r(x) - F\tilde{\phi}(x)) \quad (4.87)$$

$$\tilde{\phi}(x) = (F^T R^{-1} F)^{-1} (F^T R^{-1} r(x) - f(x)) \quad (4.88)$$

wodurch sich der  $e_{MSE}$  aus Gleichung 4.68 zu

$$\begin{aligned} MSE(x) &= \sigma^2 (\omega^T(x) R \omega(x) - 2\omega^T(x) r(x) + 1) \\ &= \sigma^2 (1 + \omega^T(x) (R\omega(x) - 2r(x))) \\ &= \sigma^2 (1 + \tilde{\phi}^T(x) F^T R^{-1} F \tilde{\phi}(x) + r^T(x) R^{-1} r(x)) \\ &= \sigma^2 (1 + w^T(x) (F^T R^{-1} F)^{-1} w(x) - r^T(x) R^{-1} r(x)) \end{aligned} \quad (4.89)$$

ergibt. Hierbei ist  $w(x) = F^T R^{-1} r(x) - f(x)$ . Abbildung 4.9 veranschaulicht das Verhalten des  $e_{MSE}$ . In schwarz ist die Testfunktion  $y$  aus 4.58 dargestellt. Zusätzlich ist in blau ein auf fünf Stützpunkten basierendes Krigingmodell  $\hat{y}$  sowie gestrichelt der  $e_{MSE}$  dargestellt. In der nahen Umgebung der Stützpunkte ist der  $e_{MSE}$  sehr klein und wird größer, umso weiter die nächsten Stützstellen entfernt sind.

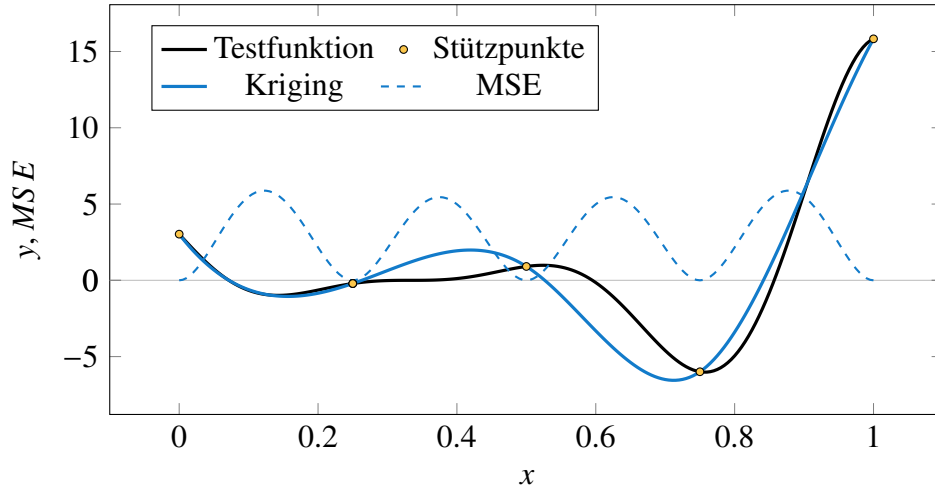


Abbildung 4.9.: Veranschaulichung des MSE eines Krigingmodells, das auf 5 gleichmäßig verteilten Stützpunkten der Testfunktion 4.58 beruht.

## 4.6. Hierarchisches Kriging

### 4.6.1. Mathematische Grundlagen zur Erstellung von Hierarchischen Krigingmodellen

Die Beschreibung des hierarchischen Krigings basiert auf Han [HG12] sowie Sauerbrei und Freund [SF13].

Wie bei anderen Verfahren zur Integration mehrerer Genauigkeitsstufen stehen beim hierarchischen Kriging jeweils Stützpunkte des Basismodells ( $X^{(b)}, Y^{(b)}$ ) der Anzahl  $n^{(b)}$  und ein Datensatz mit genauen Stützpunkten ( $X^{(z)}, Y^{(z)}$ ) der Anzahl  $n^{(z)}$  aus dem Basis- bzw. Zielmodell zur Verfügung. Dabei ist  $n^{(z)} \ll n^{(b)}$ . Die Hauptannahme für die Modellierung mit mehreren Genauigkeitsstufen ist, dass das Basismodell den globalen Verlauf des Zielmodells gut<sup>6</sup> wiedergibt. Als erstes wird über den Krigingschätzer aus Gleichung 4.76 das Basismetamodell

$$\hat{y}^{(b)}(x) = f^{(b)}(x)\hat{\beta}^{(b)} + r_{(b)}^T(x)R_{(b)}^{-1}\left(Y^{(b)} - F^{(b)}\hat{\beta}^{(b)}\right) \quad (4.90)$$

ermittelt. Das Basismetamodell wird anschließend als Teil des Regressionsmodells in das Multilevel-Metamodell  $\hat{y}^{(zb)}(x)$  integriert. Die Annahme aus 4.41, das Krigingmodell weiche nur durch den Zufallsfehler  $\epsilon^{(zb)}(x)$  von einem Regressionsanteil  $f^{(zb)}(x) \cdot \beta^{(zb)}$  ab, gilt weiterhin. Daher ist

<sup>6</sup>Wie im späteren Unterabschnitt 4.9.2 beschrieben, fordert Toal [Toa15] ein Bestimmtheitsmaß  $r^2$  von mindestens 0.9

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

$$y^{(zb)} : \mathbb{R}^d \supset \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f^{(zb)}(x) \cdot \beta^{(zb)} + \epsilon^{(zb)}(x) \quad (4.91)$$

der Multilevel-Metamodellansatz. Das Regressionsmodell  $f^{(zb)}(x) \cdot \beta^{(zb)}$  ist nun eine erweiterte Version der bisherigen beiden Ansätze. Zum einen kann analog zum Ordinary Kriging aus Gleichung 4.45

$$p = 0, \quad f^{(zb)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \hat{y}^{(b)}(x) \quad (4.92)$$

das Basismetamodell mit einer Skalierung in das Multilevel-Metamodell einfließen.

Zum anderen kann analog zum Universal Kriging aus 4.46 das Basismetamodell als Teil der linearen Regression mit

$$p = d, \quad f^{(zb)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, \quad x = (x_1, \dots, x_d)^T \mapsto (\hat{y}^{(b)}(x), x_1, \dots, x_d)^T \quad (4.93)$$

integriert werden.

Der Regressionsparameter  $\beta^{(zb)} \in \mathbb{R}^{p+1}$  bleibt in seiner Formulierung unverändert. Der erste Eintrag des Regressionsparameters  $\beta^{(zb)}$  ist ein Indikator für die Korrelation zwischen Basismetamodell und Zielmodellstützpunkten. Damit ist der Regressionsvektor an den Stützstellen mit  $F^{(zb)} = (f^{(zb)}(x^1)^T, \dots, f^{(zb)}(x^{n^{(zb)}})^T)$  gegeben.

Die weitere Herleitung ist analog zu der des einfachen Krigingschätzers, womit sich der hierarchische Krigingschätzer zu

$$\hat{y}^{(zb)}(x) = f^{(zb)}(x) \hat{\beta}^{(zb)} + r_{(zb)}^T(x) \underbrace{R_{(zb)}^{-1} (Y^{(z)} - F^{(zb)} \hat{\beta}^{(zb)})}_{=: v^{(zb)}} \quad (4.94)$$

ergibt.

Nach Han [HG12, Appendix] lässt sich dieses Verfahren über die gleiche Vorgehensweise mehrfach überlagern, um Krigingmodelle mit mehr als 2 Genauigkeitsstufen zu erhalten. Dafür wird jeweils das (hierarchische) Krigingmodell in das Regressionsmodell der nächsten Genauigkeitsstufe integriert.

#### 4.6.2. Verifikation und Validierung

Zur Verifikation und Validierung des implementierten Ansatzes wird die Testfunktion  $y(x)$  aus Gleichung 4.58 betrachtet, die als Zielmodell  $y(x)^{(z)}$  dienen soll. Zusätzlich ist eine abgewan-

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

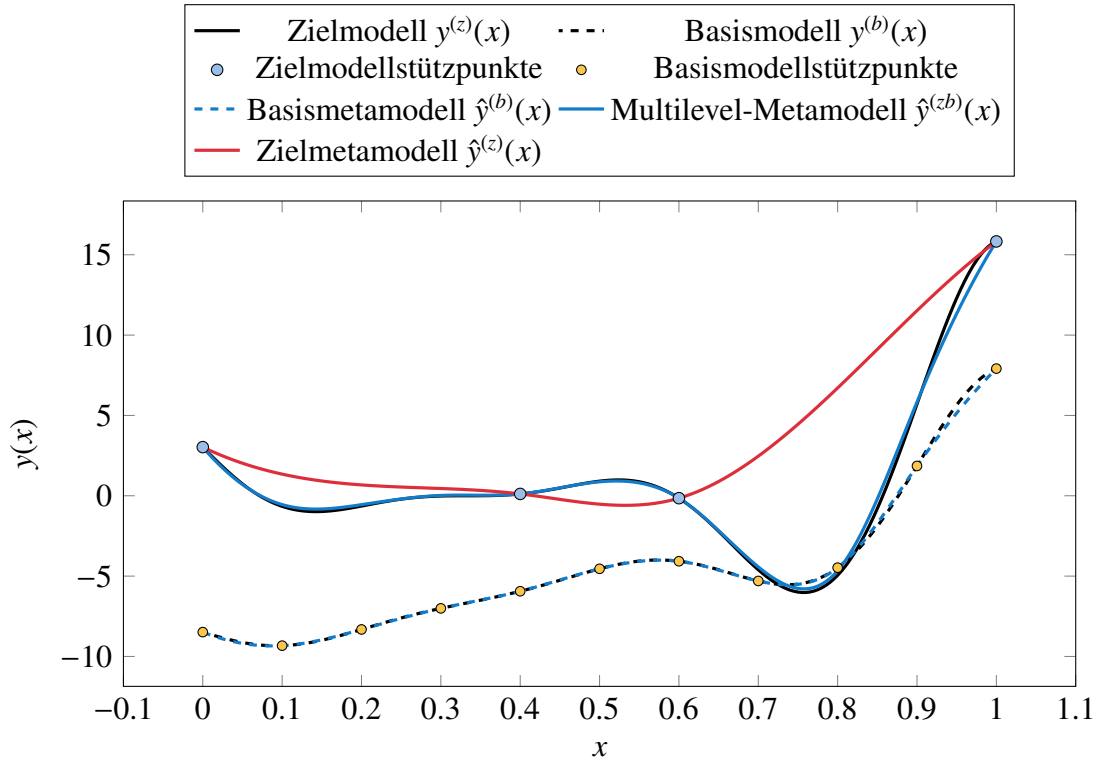


Abbildung 4.10.: Veranschaulichung des Potentials hierarchischer Metamodelle.

delte Funktion

$$y^{(b)}(x) = 0.5 \cdot y(x) + 10 \cdot (x - 0.5) - 5 \quad (4.95)$$

definiert, mit der das Basismodell beschrieben ist. Dieses Basismodell unterscheidet sich vom Zielmodell durch eine Skalierung von  $y(x)^{(z)}$  und eine linearen Funktion, die durch die beiden additiven Terme beschrieben ist. Diese Testfunktionen stammen aus Forrester [FSK08] und eignen sich gut, um die Potentiale einer Metamodellformulierung mit unterschiedlich genauen Stützpunktmengen zu zeigen.

Diese beiden Testmodelle sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Weiterhin sind die Stützpunkte an den Zielmodellstützstellen  $X^{(zb)} = (0.0, 0.4, 0.6, 1.0)$  und den Basismodellstützstellen  $X^{(b)} = (0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0)$  sowie das Basismetamodell, das Multilevel-Metamodell und das Zielmetamodell visualisiert.

Die Abbildung veranschaulicht, dass alle Krigingmodelle durch ihre Stützstellen verlaufen, was die Bedingung 4.44 erfüllt. Weiterhin entsprechen die Verläufe der Krigingmodelle denen von Forrester [FSK08, Abb. 8.1] qualitativ.

Das Multilevel-Metamodell, das zusätzliche Information des globalen Trends durch das Hin-

zufügen des Basismetamodells in sein Regressionsmodell beinhaltet, approximiert deutlich besser das Zielmodell im Vergleich zum roten Zielmetamodell, das ausschließlich auf den Zielmodellstützstellen beruht. Dies zeigt, dass das hierarchische Kriging ein Verfahren ist, mit dem Hypothese 1 prinzipiell umgesetzt werden kann.

## 4.7. Quantifizierung der Metamodellgenauigkeit

Die Quantifizierung der Genauigkeit von Metamodellen erfolgt im Allgemeinen durch den Vergleich der Metamodellwerte mit den tatsächlichen Funktionswerten, den Testpunkten. Dazu ist es nötig die Quantifizierung an Stellen durchzuführen, an denen das Metamodell keine Stützpunkte besitzt, mit denen es trainiert wurde. Dazu gibt es zwei hauptsächlich verwendete Methoden. Zum einen können über einen zusätzlichen Versuchsplan Testpunkte erzeugt und für den Vergleich verwendet werden. Dies ist jedoch sehr aufwändig, da neue Stützwerke über das teure Ausgangsmodell erzeugt werden müssen. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung der Kreuzvalidierung, die im Folgenden beschrieben ist.

### 4.7.1. Kreuzvalidierung

Die Kreuzvalidierung ist eine oft verwendete Methode (beispielsweise Jones [JSW98], Kalnins [Kal06], Busby [BFI07], Forrester [FSK08, Kap.2.1.2], Ghasemi [GH17]), mit der das Training und die Bewertung eines Metamodells auf der gleichen Stützpunktmenge durchgeführt wird. Hierfür wird die Stützpunktmenge  $(X, Y)$  zufällig in  $k$  disjunkte Untermengen unterteilt. Nun wird jeweils eine Untermenge aus der Stützpunktmenge entnommen und über die verbleibenden Stützpunkte ein Metamodell gebildet. Dieses Metamodell kann nun an den Stützpunkten der entnommenen Untermenge getestet werden. Damit wird vermieden, dass das Metamodell an bereits bekannten Stützpunkten getestet wird. Dieses Verfahren wird als  $k$ -fache Kreuzvalidierung (engl.  $k$ -fold Cross-Validation) bezeichnet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Sonderfall  $k = n$  betrachtet, bei dem jeweils ein Stützpunkt entnommen wird (engl. Leave One Out (LOO) cross-validation).

So lässt sich der Vektor der Kreuzvalidierungswerte

$$\hat{Y}_{X/\{x_i\}} =: \begin{pmatrix} \hat{y}_{X/\{x_1\}}(x_1) \\ \vdots \\ \hat{y}_{X/\{x_n\}}(x_n) \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

ableiten, der im folgenden Abschnitt mit den Stützwerten  $Y$  verglichen werden kann.

Das Auslassen einzelner Stützpunkte aus der Grundgesamtheit beeinflusst das erzeugte Metamodell. Daher ist die Region um den ausgelassenen Punkt schlechter mit weiteren Punkten abgedeckt, was zu einer schlechteren Approximierung an dieser Stelle führt. Des Weiteren wird zur Erstellung des Krigingmodells  $\hat{y}_{X/\{x_i\}}$  keine erneute Optimierung der Hyperparameter des Krigingmodells durchgeführt. Durch die Entnahme eines Stützpunkts ändert sich das Optimum der Hyperparameter in der Maximum-Likelihood-Optimierung aus Gleichung 4.81. Es wird aber angenommen, dass sich das Optimum nicht sehr weit von den Hyperparametern des vollständigen Krigingmodells entfernt, weswegen die Hyperparameter aus Gründen der Rechenzeit konstant bleiben.

### 4.7.2. Metriken

Die im Folgenden vorgestellten Metriken zur Genauigkeitsanalyse verwenden zwei Vergleichsvektoren  $(Y, \hat{Y})$ . Zum einen den Vektor mit Beobachtungen  $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$  und zum anderen den Vektor der Schätzwerte  $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)^T$  an den Beobachtungsstellen  $X$ . In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Möglichkeiten für diese Vektorenpaare betrachtet:

**LOO-Kreuzvalidierung:** Durch eine LOO-Kreuzvalidierung können die Kreuzvalidierungswerte mit den Stützwerten  $Y_{sp}$  verglichen werden.

$$(Y, \hat{Y}) = (Y_{sp}, \hat{Y}_{X/\{x_i\}}) \quad (4.97)$$

**Testdaten:** Werden neben den Stützpunkten auch Testpunkte  $(X_{test}, Y_{test})$  erzeugt, so können diese Testwerte und die Schätzer  $\hat{Y}_{test}$  an den gleichen Stellen für die Bewertung der Metamodellgenauigkeit verwendet werden.

$$(Y, \hat{Y}) = (Y_{test}, \hat{Y}_{X_{test}}) \quad (4.98)$$

Eine Metrik zur Genauigkeitsbewertung ist eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die einen Skalar als Gütewert liefert. Mit diesen Gütewerten können Metamodelle miteinander verglichen werden oder anderweitig in Relation gesetzt werden. Wie in Abbildung 2.1 in „Untersuchung der Modellgüte“ angedeutet, kann der Gütewert mit einem selbst definierten Schwellenwert verglichen werden, um ein erstelltes Metamodell zu akzeptieren oder um weitere Schritte zur Genauigkeitssteigerung zu unternehmen. Im Folgenden werden verschiedene Metriken zur Genauigkeitsbewertung vorgestellt.

##### MAE

Der mittlere absolute Fehler (Mean Absolute Error (MAE)) summiert die absoluten Differenzen der Einzelwerte auf, um sie mit der Stützstellenanzahl zu skalieren.

$$e_{MAE} =: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (4.99)$$

##### MSE

Der mittlere quadratische Fehler (Mean Square Error (MSE)) verwendet im Gegensatz zum MAE das Quadrat der Differenzen. Es wird das zweite Moment der Differenzen ermittelt. Das verbindet ähnlich zur Varianz aus Gleichung 4.6 eine Aussage sowohl über die Größe als auch die Verteilung der Differenzen. Damit werden im Vergleich zum MAE größere Ausreißer in den Differenzen stärker gewertet.

$$e_{MSE} =: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (4.100)$$

##### RMSE

Mit der Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (Root Mean Square Error (RMSE)) hat im Gegensatz zum  $e_{MSE}$  das Ergebnis die gleiche Größenordnung und dieselbe Einheit wie die Eingangswerte.

$$e_{RMSE} =: \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (4.101)$$

##### Bestimmtheitsmaß

Das Bestimmtheitsmaß ist nach Forrester [FSK08] eng verwandt mit dem Korrelationskoeffizienten aus Gleichung 4.9. Es ist definiert als

$$r^2 = 1 - \left( \frac{Cov(Y, \hat{Y})}{\sqrt{Var(Y) \cdot Var(\hat{Y})}} \right). \quad (4.102)$$

Die anderen hier vorgestellten Metriken liefern als Ergebnis Null, wenn  $y = \hat{y}$ ,  $\forall y \in Y, \hat{y} \in \hat{Y}$ . Daher wird  $r^2$  als  $1 - r^2$  verwendet.

$$r_{-1}^2 = 1 - r^2 \quad (4.103)$$

#### Problemstellung der absoluten Fehler

Alle bisher vorgestellten Methoden verwenden Differenzen als Fehlerwerte  $e = y - \hat{y}$ . Diese gehen davon aus, dass die Varianzen des absoluten Fehlers im gesamten Parameterraum gleich oder ähnlich sind. Dies ist nicht anwendbar, wenn sich die Stützwerte und deren Varianzen über mehrere Größenordnungen unterscheiden können, wie es in den beiden Anwendungskapiteln 5 und 6 der Fall ist. Dabei haben absolut große Stützwerte sehr große Varianzen der Fehler und absolut kleine Stützwerte kleine Fehlervarianzen. Durch die Mittelung der Fehler in den bisherigen Metriken werden die Fehler der Stützstellen ungleich gewichtet und verzerren somit den Gütewert.

#### MSRE

Die oft verwendete Lösung dieses Problems ist die Verwendung von Quotienten mit dem mittleren quadratischen relativen Fehler (Mean Square Relative Error (MSRE)). Diese kann aus den vorherigen Metriken erstellt werden, indem die Differenzen der Wertepaare jeweils mit ihrem Maximalwert dividiert werden.

$$e_{MSRE} =: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\min(|y_i|, |\hat{y}_i|)}{\max(|y_i|, |\hat{y}_i|)} \right)^2 \quad (4.104)$$

Die jeweiligen Minima und Maxima der Stützwerte werden verwendet, um diesen Operator kommutativ zu gestalten und um den maximalen Fehler zweier Stützwerte auf eins zu beschränken. Eine große Einschränkung dieses Verfahrens ist, dass alle Stützwerte das gleiche Vorzeichen haben müssen und nicht Null sein dürfen.

#### RMSRE

Wie beim  $e_{RMSE}$  kann auch der  $e_{MSRE}$  radiziert werden, um die gleiche Einheit und Größenordnung wie die Ausgangsfehler zu erhalten. Somit ist die Wurzel des mittleren quadratischen



relativen Fehlers (Root Mean Square Relative Error (RMSRE))

$$e_{RMSRE} =: \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\min(|y_i|, |\hat{y}_i|)}{\max(|y_i|, |\hat{y}_i|)} \right)^2} \quad (4.105)$$

### MRE

Das Quadrieren der Fehler legt ein stärkeres Gewicht auf größere absolute bzw. relative Fehler. Sollen Metamodelle bezüglich einer Zielgenauigkeit bewertet werden, ist die gleichmäßige Gewichtung der Fehlerwerte sinnvoller. Somit ist der gleichmäßig gewichtende mittlere relative Fehler (Mean Relative Error (MRE))

$$e_{MRE} =: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\min(|y_i|, |\hat{y}_i|)}{\max(|y_i|, |\hat{y}_i|)} \right) \quad (4.106)$$

### MaxSE

Auch Maximalwerte der zuvor beschriebenen Metriken können verwendet werden. Dies liefert ausschließlich eine Aussage über das Extremum der Vektorenpaare und kann beispielsweise als Abbruchkriterium für iterative Verfahren verwendet werden, wie beispielsweise der maximale skalierte Fehler (Maximum Scaled Error (MaxSE))

$$e_{MaxSE} =: \frac{\max(|Y - \hat{Y}|)}{\max(Y) - \min(Y)}. \quad (4.107)$$

### MaxRE

Ähnlich lässt sich der maximale relative Fehler (Maximum Relative Error (MaxRE)) für relative Fehlermaxima verwenden.

$$e_{MaxRE} =: \max \begin{pmatrix} 1 - \frac{\min(|y_1|, |\hat{y}_1|)}{\max(|y_1|, |\hat{y}_1|)} \\ \vdots \\ 1 - \frac{\min(|y_n|, |\hat{y}_n|)}{\max(|y_n|, |\hat{y}_n|)} \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

## 4.8. Adaptive Stützpunkterweiterung

Der rechenintensivste Schritt im Prozess zur Erstellung von Metamodellen aus Abbildung 2.1 ist das Ermitteln der Stützwerte aus den Stützstellen des Versuchsplans. Für alle effizienten Verfahren zur Versuchsplanung aus Abschnitt 4.2 muss die Anzahl an Stützstellen initial definiert werden. Wenn dabei eine zu geringe Stützstellenanzahl gewählt wird, ist die Approximationsgüte des Metamodells schlecht. Die adaptive Stützpunkterweiterung ist eine Methode, mit der auf Basis bereits existierender Stützpunkte weitere Stützpunkte erzeugt werden, um geringere Approximationsfehlerwerte zu erreichen. Für die adaptive Stützpunkterweiterung wird die Methodik von Busby [BFI07] beschrieben, um ihre Verwendbarkeit in den beiden folgenden Anwendungsfällen zu untersuchen.

Als erstes wird in Unterabschnitt 4.8.1 der Entwurfsraum in Hyperquader unterteilt. Anschließend werden in Unterabschnitt 4.8.2 schlecht approximierbare Bereiche des Krigingmodells identifiziert. Diese Bereiche dienen in Unterabschnitt 4.8.3 als Suchregionen, um neue Stützstellen zu ermitteln, an denen ein neuer Stützwert errechnet werden soll. Dieser wird anschließend der Stützpunktmenge hinzugefügt und die Hyperparameter des Krigingmodells optimiert.

### 4.8.1. Unterteilung des Entwurfsraums

Die Methode nach Busby [BFI07, Kap. 5.1] unterteilt den Entwurfsraum  $\tilde{\Omega}$  in  $m$  disjunkte Zellen  $V_i$ , die in ihrer Vereinigung den gesamten Entwurfsraum beschreiben. Somit gilt für alle  $i, j = 1, \dots, m$

- $V_i \in \tilde{\Omega}$ ,
- $\cup V_i = \tilde{\Omega}$ ,
- $V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$ .

Die Unterteilung wird ähnlich dem LHS aus Unterabschnitt 4.2.4 vorgenommen, weswegen der Entwurfsraum entlang jeder Parameterachse unterteilt wird. Der Unterschied besteht darin, dass hier die Anzahl der Unterteilungen in jede Raumrichtung über

$$m_j = \lceil \theta_j * c \rceil, \quad (4.109)$$

mit  $j = 1, \dots, d$  variiert. Dabei ist für das kubische Korrelationsmodell  $c = 10$  und für die anderen Korrelationsmodelle  $c = 1$ . Hieraus lässt sich die Anzahl der Zellen

$$m = \prod_{j=1}^d m_j \quad (4.110)$$

ermitteln. Eine Visualisierung der Zellen findet sich in Busby [BFI07, Abb. 8.2].

Um auf den Grenzen der Zellen eine doppelte Zuordnung von Stützstellen an aneinander grenzenden Zellen zu vermeiden, reichen die Zellengrenzen auf der einen Seite nur an die Grenze heran, während sie auf der anderen Seite die Zellengrenze mit einschließen. Damit kann jede Stützstelle des bestehenden Metamodells  $x \in X$  genau einer Zelle zugeordnet werden und es ergibt sich

$$X_{V_i} =: X \cap V_i \quad (4.111)$$

die Menge der Stützstellen in der Zelle  $V_i$  und mit  $Y_{V_i} = y(X_{V_i})$  die dazugehörigen Stützwerte.

#### 4.8.2. Bewertung der lokalen Approximationsgüte

Für jede Zelle  $V_i$  wird nun eine Kreuzvalidierung an den in  $V_i$  enthaltenen Stützstellen  $X_i$  durchgeführt. Dies liefert die Kreuzvalidierungswerte  $\hat{Y}_{X_i/\{x\}}$ , die mit den Stützwerten  $Y_i$  auf ihre skalierte maximale Abweichung hin untersucht werden können.

$$e_{max,V_i} = \frac{\max(|Y_i - \hat{Y}_{X_i/\{x\}}|)}{\max(Y_i) - \min(Y_i)} \quad (4.112)$$

$e_{max,V_i}$  wird anschließend mit einer definierten Zielgenauigkeit  $\eta_{KV}$  verglichen. Ist

$$\eta_{V_i} \leq \eta_{KV} \quad (4.113)$$

so wird das Genauigkeitsziel dieser Zelle als erreicht angenommen und es muss nichts weiter unternommen werden. Wenn  $\eta_{V_i} > \eta_{KV}$ , ist das Genauigkeitsziel nicht erreicht. Als Folge soll innerhalb dieser Zelle eine weitere Stützstelle hinzugefügt werden. Auch Zellen ohne Stützstellen haben ihr Genauigkeitsziel nicht erreicht. Im nächsten Abschnitt werden somit Verfahren vorgestellt, mit denen weitere Stützstellen in einem definierten Bereich des Entwurfsraums hinzugefügt werden können.

### 4.8.3. Stützstellensuche über MSE

Mit den Krigingmodellen in dieser Arbeit wird hauptsächlich das Ziel verfolgt, eine gute Approximation im gesamten Entwurfsraum zu ermöglichen. Eine globale Bewertung des im Krigingmodell geschätzten Fehlers ist bereits über den  $e_{MSE}$  aus Gleichung 4.89 gegeben. Daher kann eine neue Stützstelle an der Position in der Zelle  $V_i$  hinzugefügt werden, an der der  $e_{MSE}$  sein Maximum annimmt.

$$\max_{x \in V_i} MSE(x) \quad (4.114)$$

Eine Visualisierung des  $e_{MSE}$  ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Die Lösung des Maximierungsproblems wird auf numerischem Weg wie bei der MLE durch globale Optimierer durchgeführt. Damit werden Stützstellen ermittelt, die einen vergleichsweise hohen Abstand zu benachbarten existierenden Stützstellen aufweisen. Sauerbrei vergleicht diesen Ansatz mit dem von Shewry [SW87] vorgestellten Verfahren zur Maximierung der Determinante einer erweiterten Korrelationsmatrix, die sich in Aufwand und Lösungsschritten kaum unterscheiden.

### 4.8.4. Stützstellensuche über MSE und relativen Fehler im hierarchischen Krigingmodell

Der Blickwinkel weicht bei diesem Verfahren von einem gleichmäßig priorisierten Raum ab, der ausschließlich über den  $e_{MSE}$  vom Abstand zu den nächsten Stützstellen abhängig ist. Daher wird das bisherige Kriterium um einen relativen Modellfehler aus Gleichung 4.106 als Skalierungsfaktor erweitert. Dieser kann zwischen Basismetamodell  $\hat{y}^{(b)}(x)$  und hierarchischem Krigingmodell  $\hat{y}^{(zb)}(x)$  ermittelt werden und liefert mit der Optimierung

$$\max_{x \in V_i} MSE(x) \cdot e_{MRE}(\hat{y}^{(zb)}(x), \hat{y}^{(b)}(x)) \quad (4.115)$$

in jeder Region  $V_i$  die Stelle an der sowohl  $e_{MSE}$  als auch der relative Fehler groß ist. Dieses MSE-ReLE-Kriterium ist beschränkt auf Modelle, deren Werte ausschließlich positiv oder negativ sowie nicht nahe Null sind. Es folgt aus der Annahme, dass Regionen im Parameterraum, die einen hohen relativen Fehler zwischen Basis- und Zielmodell aufweisen, genauer untersucht werden sollten. Die Multiplikation mit dem  $MSE$  liefert zusätzlich die bereits oben beschriebenen Eigenschaften.

### 4.8.5. Erweiterung des Krigingmodells

In jeder als unzureichend klassifizierten Zelle werden somit neue Stützstellen erzeugt. Diese bilden wie in Abbildung 2.1 mit den bisherigen Stützstellen den neuen Versuchsplan, auf dessen Basis die neuen Stützwerte und anschließend das aktualisierte Krigingmodell ermittelt werden.

Die adaptive Stützpunkterweiterung wird so lange iteriert, bis die Bedingung aus Gleichung 4.113 für alle Zellen erfüllt oder die maximale Anzahl zusätzlicher Stützstellen erreicht ist.

## 4.9. Gesamtbetrachtung der Metamodellerstellung

### 4.9.1. Aufwandsabschätzung

Auch wenn der Aufwand der Basis- und vor allem Zielmodellauswertung deutlich größer sein sollte als die der Krigingmodellerstellung, ist er vor allem für große Stützpunktmengen und die adaptive Stützpunkterweiterung relevant. Tabelle 4.1 listet in Form der  $\mathcal{O}$ -Notation den Aufwand der einzelnen Prozessschritte von „Versuchsplanung“ bis „Finales Metamodell“ und der iterativen Phase zur „adaptiven Stützpunkterweiterung“ aus Abbildung 2.1 auf. Die Spalte „Kriging“ beschreibt dabei den Erstellungsaufwand eines einfachen Krigingmodells, während die Spalte „Hier. Kriging“ den Erstellungsaufwand eines hierarchischen Krigingmodells beschreibt, dessen Basismetamodell bereits existiert.

Im Vergleich zur Erstellung des Krigingschätzers ist das Erstellen eines CVT deutlich günstiger. Hier sind die einzelnen Iterationsschritte des CVT günstiger als die Auswertung der MLE und bisher beobachtete Anwendungen benötigen weniger Iterationen als die MLE-Optimierung. Der aufwändigste Anteil zur Erstellung des Krigingschätzers ist die Optimierung der Hyperparameter über die MLE. Daher ist zur Aufwandsreduktion der Metamodellerstellung die Wahl von Optimierer und Startwerten, sowie die Wiederverwendung der Hyperparameter bei ähnlichen Modellen von Bedeutung.

Die Kreuzvalidierung ist ein teures Verfahren im Vergleich zu den anderen gelisteten Aufwänden. Im Vergleich zur Erstellung weiterer Teststützpunkte aus dem Basis- oder Zielmodell sollte es jedoch deutlich günstiger sein. Wird eine adaptive Stützpunkterweiterung durchgeführt, sind die Kreuzvalidierung und die Optimierung von  $e_{MSE}$  die aufwändigsten Anteile.

Der Vorteil der Verwendung von Metamodellen wie Kriging zeigt sich deutlich in der letzten Zeile. Die Auswertung eines erstellten Metamodells an einer beliebigen Stelle ist mit  $\mathcal{O}(d \cdot n^{(b)})$  sehr günstig. Hierdurch ermöglichen Metamodelle die effiziente Auswertung vieler Stützstel-

#### 4. Methoden zur Metamodellerstellung

Prozessschritt	Subprozess	Aufwand der Metamodellvarianten	
		Kriging	Hier. Kriging
Versuchs- planung	Eine Iteration CVT	$\mathcal{O}(n_q \cdot \log n)$	$\mathcal{O}(n_q \cdot \log n^{(z)})$
	Anzahl Iterationen CVT	abhängig von $n_q$ und Konvergenz	
Stützwarterstel- lung	–	abhängig von Basis- und Zielmodell	
Erstellung Krigingmodell	Regressionsvektor $F$ Gl. 4.42	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(d \cdot n^{(b)} \cdot n^{(z)})$
	Auswertung einer MLE Gl. 4.81	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n_{(z)}^3)$
	Optimierung MLE	abhängig vom Optimierer	
	Erstellung Krig.-Schätzer 4.77	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n_{(z)}^3)$
Bewertung Me- tamodellgüte	Kreuzvalidierung	$\mathcal{O}(n^4)$	$\mathcal{O}(n_{(z)}^4)$
Adaptive Stützstellener- weiterung	Unterteilung Entwurfsraum	$\mathcal{O}(n \log m)$	$\mathcal{O}(n^{(z)} \log m)$
	Kreuzvalidierung	$\mathcal{O}(n^4)$	$\mathcal{O}(n_{(z)}^4)$
	Auswertung $e_{MSE}$	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n_{(z)}^3)$
	Optimierung $e_{MSE}$	abhängig vom Optimierer, m-fach	
Verwendung Krigingmodell	Krigingschätzer Gl. 4.77	$\mathcal{O}(d \cdot n)$	$\mathcal{O}(d \cdot n^{(b)} + d \cdot n^{(z)})$

Tabelle 4.1.: Aufwandsabschätzung der Krigingmodellerstellung aus Abbildung 2.1 vom Versuchsplan bis zum finalen Metamodell und Versuchsplanerweiterung.

len.

Die Erstellung eines Multilevel-Metamodells aus Abschnitt 4.6 unterscheidet sich vom einfachen Kriging durch die erweiterte Formulierung des Regressionsanteils. Damit ist der Erstellungsaufwand des Regressionsvektors  $F^y$  aufwändiger. Auch die Verwendung des Krigingschätzers wird aufwändiger und skaliert linear mit  $n^{(b)}$  und  $n^{(z)}$ .

#### 4.9.2. Anforderungen an Entwurfsraum und Zielgrößen zur Metamodellnutzung

Zur Metamodellbildung muss eine Parametrisierung gewählt werden, die sowohl für das Metamodell als auch für die Beulanalysefunktionen verwendbare Parameter und Zielfunktionen liefert. Daher müssen bei der konzeptuellen Metamodellerstellung in den folgenden Kapiteln diese Bedingungen berücksichtigt werden

1. Die Analysefunktion hat einen Wertebereich ohne Unstetigkeiten oder mit Unstetigkeiten, die nicht stark ausgeprägt sind.
2. Von den Parametern wird ein Mindestmaß an Sensitivität auf die untersuchte Zielfunktion erwartet.
3. Die Anzahl der Parameter ist im gesamten Entwurfsraum konstant.

Die erste Bedingung folgt aus der Annahme in der Metamodellbildung, dass Stützwerte benachbarter Parameter ähnlich sind. Dies wird beim Kriging über die Korrelationsmodelle aus Gleichung 4.53, 4.54 beziehungsweise 4.55 ausgedrückt. Unstetigkeiten verletzen diese Annahme. Auf der anderen Seite sind kleine Unstetigkeiten zulässig, da sie durch eine Regularisierung näherungsweise ausgeglichen werden, was mit Gleichung 4.59 sowie Abbildung 4.8 beschrieben und dargestellt ist.

Durch die zweite Bedingung werden Größen ausgeschlossen, von denen nahezu keine Sensitivität erwartet wird. Damit kann die Parameteranzahl reduziert und die Approximationsgüte erhöht werden. Die Auswahl sensibler Parameter kann sowohl qualitativ durch Erfahrungswerte mit den Parametersensitivitäten als auch quantitativ mit den Methoden aus Abschnitt 4.3 durchgeführt werden. Die qualitativen Schwellenwerte müssen problemspezifisch definiert werden, was im Anwendungskapitel in Abschnitt 6.3 diskutiert wird.

Die letzte Bedingung folgt aus der Eigenschaft der hier vorgestellten Versuchspläne und des Krigings. Beide Verfahren haben im gesamten Parameterraum eine konstante Anzahl von Parametern.

### 4.9.3. Kriterien für Multilevel-Metamodelle

Toal [Toa15] untersucht, unter welchen Bedingungen Multilevel-Metamodellansätze im Vergleich zu einem einfachen Zielmetamodell vorteilhaft sind. Durch die Betrachtung von vier analytischen Testfunktionen wurden daraus folgende Kriterien erstellt.

1. Das Bestimmtheitsmaß aus Gleichung 4.102 zwischen Basis- und Zielmodell soll  $r^2 > 0.9$  sein.
2. Der Anteil eingesparter Zielmodellstützpunkte  $f_r$ , soll die Bedingung  $0.1 < f_r < 0.8$  erfüllen.
3. Es sollen stets mehr Basismodellstützpunkte als Zielmodellstützpunkte verwendet werden.
4. Die Bedingung  $f_r > 1.75 / (1 + 1/c_r)$  soll erfüllt sein.

Dabei ist

$$f_r = 1 - \frac{n_{me}}{n_{se}} \quad (4.116)$$

definiert mit  $n_{me}$  als die Anzahl der Zielmodellstützpunkte des Multilevel-Metamodells und  $n_{se}$  ist die Anzahl der Zielmodellstützpunkte in einem gleichzeitigen Metamodell aus einem Genauigkeitslevel. Weiterhin gilt

$$c_r = \frac{c_c}{c_e} \quad (4.117)$$

mit dem relativen Aufwand zwischen Basismodellauswertung  $c_c$  und Zielmodellauswertung  $c_e$ .

## 4.10. Zusammenfassung

Nach der Beschreibung der Analysemodelle in Kapitel 3, sind in diesem Kapitel die Bestandteile des Prozesses zur Metamodellbildung aus Abbildung 2.1 dargestellt.

Ein LCVT liefert als Verfahren zur Versuchsplanerstellung aus Abschnitt 4.2 eine Stützstellenmenge mit guten Verteilungseigenschaften. Mit der Sensitivitätsanalyse aus Abschnitt 4.3 kann eine Klassifikation sensibler und unsensibler Parameter vorgenommen werden. Die Methode nach Morris bietet dabei die höchste Flexibilität und die qualitativ höchste Aussagegüte. Als Nächstes wurde die konzeptuelle Herangehensweise zur Erstellung von Metamodellen und Klassen verschieden aufwändiger Metamodelle vorgestellt. Daraus leitet sich aus konzeptuellen Gesichtspunkten die Verwendung von Kriging als Metamodellverfahren ab. Folglich wird der Krigingschätzer hergeleitet und die wichtigsten Einflussgrößen auf das Krigingmo-



#### *4. Methoden zur Metamodellerstellung*

dell dargestellt. Darauf aufbauend ist die Formulierung des hierarchischen Kriging dargelegt, mit dem Multilevel-Metamodelle erzeugt werden können.

Die erstellten Metamodelle können über verschiedene Metriken und einen anwendungsspezifisch zu definierenden Schwellenwert auf ihre Genauigkeit überprüft werden. So kann entschieden werden, ob eine Genauigkeitssteigerung nötig ist. Eine Möglichkeit dieser Genauigkeitssteigerung ist das Hinzufügen neuer Stützpunkte über die adaptive Stützpunkterweiterung. Eine andere, aufwändigere Möglichkeit ist die Änderung der Metamodellkonzeption, wobei beispielsweise Änderungen an der Parametrisierung, dem Entwurfsraum und dem Metamodelltyp möglich sind.

Das Kapitel schließt mit einer Aufwandsbetrachtung zur Metamodellerstellung sowie mit den aufgestellten Anforderungen an den Entwurfsraum, welche in den folgenden Kapiteln beachtet werden müssen.

# 5. Metamodellbildung am Beispiel

## Biegebalken

### 5.1. Zielstellung

In diesem Kapitel soll ein mechanisches Beispiel mit einfachen funktionalen Zusammenhängen für die Untersuchung der Verfahren zur Erstellung von Multilevel-Metamodellen dargestellt werden. Dieses dient der Kalibrierung, Verifikation und Veranschaulichung der im vorherigen Kapitel beschriebenen Methoden. Dieses Kapitel diskutiert die Problemstellung in einem kleinen Parameterraum, um eine stochastische Analyse der nicht deterministischen Verfahren zur Metamodellbildung zu ermöglichen.

Die statische gerade Biegung eines einseitig eingespannten Balkens ist ein analytisch geschlossenes lösbares mechanisches Problem. Dafür wird die Biegelinie eines einseitig eingespannten Balkens anhand der Theorie von Bernoulli für schubstarre Balken und anhand der Theorie von Timoshenko für schubweiche Balken als Basismodell  $u^{(b)}$  bzw. als Zielmodell  $u^{(z)}$  verwendet. In Abschnitt 5.5 wird dargestellt, dass die Betrachtung des Logarithmus der Verschiebung vorteilhaft ist. Daher werden im Folgenden die Verfahren sowohl im nicht-logarithmischen als auch im logarithmischen Raum dargestellt. Die logarithmischen Werte sind mit dem Subskript  $(\cdot)_{\log}$  versehen.

### 5.2. Analyseverfahren

Abbildung 5.1 veranschaulicht den schematischen Aufbau und mögliche Lasten des Balkenmodells. Dieser einseitig eingespannte Balken isotropes Materialverhalten auf und hat ein rechteckiges Vollprofil. Der Balken wird durch die in Tabelle 5.1 gelisteten Größen beschrieben.

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

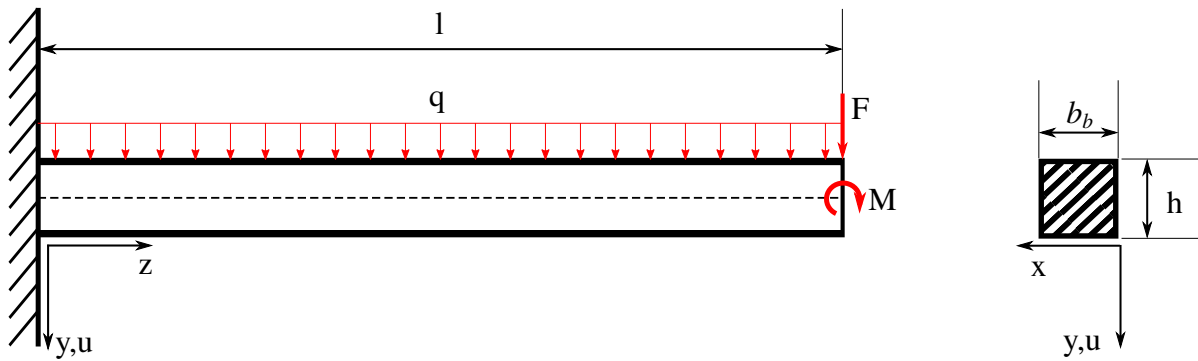


Abbildung 5.1.: Schematische Darstellung eines einseitig eingespannten Balkens in der Seitenansicht links und im Querschnitt rechts mit einem Moment  $M$ , einer Kraft  $F$  und einer Linienlast  $q$ .

Parameter Name	Formelzeichen	Nominalwert	Einheit
Elastizitätsmodul	$E$	72.4e9	$[N/m^2]$
Schubmodul	$G$	27.6e9	$[N/m^2]$
Querkontraktionszahl	$\nu$	0.33	[ ]
Balkenlänge	$l$	6	$[m]$
Balkenhöhe	$h$	0.3	$[m]$
Balkenbreite	$b_b$	0.1	$[m]$
Kraft am Balkenende	$F$	1	$[N]$
Moment am Balkenende	$M$	0	$[Nm]$
Linienlast	$q$	0	$[N/m]$

Tabelle 5.1.: Nominalwerte des Balkenmodells

### 5.2.1. Schubstarrer Balken

Die Theorie des schubstarren Balkens nach Bernoulli gilt für kleine Verformungen und schlanke Balken. Hierbei wird die Modellannahme getroffen, dass ebene Querschnitte bei der Verformung eben und unverwölbt bleiben. Weiterhin wird angenommen, dass das Materialverhalten linear elastisch ist und ideale Randbedingungen vorliegen.

Im Gegensatz zur Theorie des schubweichen Balkens vernachlässigt die Theorie des schubstarren Balkens die Verformung aus der Querkraft. Somit bleibt ein Querschnitt, der vor der Verformung senkrecht auf der Balkenachse ist, auch im verformten Zustand senkrecht auf der verformten Balkenachse.

Ausgehend von der Differentialgleichung der Biegung

$$EI_{xx} \frac{d^2 u^{(b)}(z)}{dz^2} = -M_{bx}(z) \quad (5.1)$$

mit  $E$  als Elastizitätsmodul, dem Flächenträgheitsmoment  $I_{xx}$  und dem Biegemoment  $M_{bx}$  wird die Beziehung zwischen Belastung und Verformung eines schubstarren Balkens definiert. Das Gesamtbiegemoment ergibt sich aus

$$M_{bx}(z) = -M + F(z - l) + q \left( -\frac{1}{2}z^2 + lz - \frac{1}{2}l^2 \right) \quad (5.2)$$

und somit für die Biegelinie als

$$EI_{xx} \frac{d^2 u^{(b)}(z)}{dz^2} = M + F(-z + l) + q \left( \frac{1}{2}z^2 - lz + \frac{1}{2}l^2 \right). \quad (5.3)$$

Mit der Integration nach  $z$  ergibt sich

$$EI_{xx} \frac{du^{(b)}(z)}{dz} = Mz + F \left( -\frac{z^2}{2} + lz \right) + q \left( \frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{2} + \frac{l^2 z}{2} \right) \quad (5.4)$$

für den Biegungswinkel

$$u^{(b)}(z) = \frac{1}{EI_{xx}} \left[ \frac{Mz^2}{2} + F \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{lz^2}{2} \right) + q \left( \frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{6} + \frac{l^2 z^2}{4} \right) \right] \quad (5.5)$$

und für die Verformungslinie eines schubstarren Balkens.

### 5.2.2. Schubweicher Balken

Die Betrachtung eines schubweichen Balkens nach Timoshenko [Tim21] ist eine Verallgemeinerung der Theorie nach Bernoulli. Zusätzlich zum Biegeanteil der Verformung wird durch Superposition die Schubverformung berücksichtigt, was in Abbildung 5.2 veranschaulicht wird. Die Schubspannung im Querschnitt eines Balkens ist veränderlich und somit ergibt sich im Allgemeinen durch Integration

$$Q = \int_A \tau_{yz}(x, y) dA \quad (5.6)$$

die Querkraft an einer Stelle  $z$  im Balken. Für die Theorie nach Timoshenko wird die Schubspannung im Querschnitt als konstant

$$\tau_{yz}(x, y) \rightarrow \tau_{yz} \quad (5.7)$$

angesehen. Der daraus entstehende Modellfehler wird durch den Schubkorrekturfaktor  $\kappa_b$

$$Q = \kappa_b A \tau_{yz} \quad (5.8)$$

kompensiert. Für rechteckige Vollquerschnitte wird er in Timoshenko und Goodier [TG70] mit  $\kappa_b = 5/6$  angegeben. Aus dem Hooke'schen Gesetz  $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$  folgt an jeder Stelle  $z$  im Balken

$$Q(z) = \kappa_b A G \gamma_{yz}(z) \quad (5.9)$$

die Abhängigkeit vom Winkel der Schubverformung. Eine Differentiation

$$\frac{dQ(z)}{dz} = \kappa_b A G \frac{d\gamma_{yz}(z)}{dz} \quad (5.10)$$

liefert die Schubdifferentialgleichung.

Die Biegungsdifferentialgleichung aus Gleichung 5.1 beschreibt nun die Verformung bzw. den Biegungswinkel durch reine Biegung

$$EI_{xx} \frac{d\phi(z)}{dz} = -M_{bx}(z). \quad (5.11)$$

Die Superposition des Schub- und Biegungswinkel ergibt

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

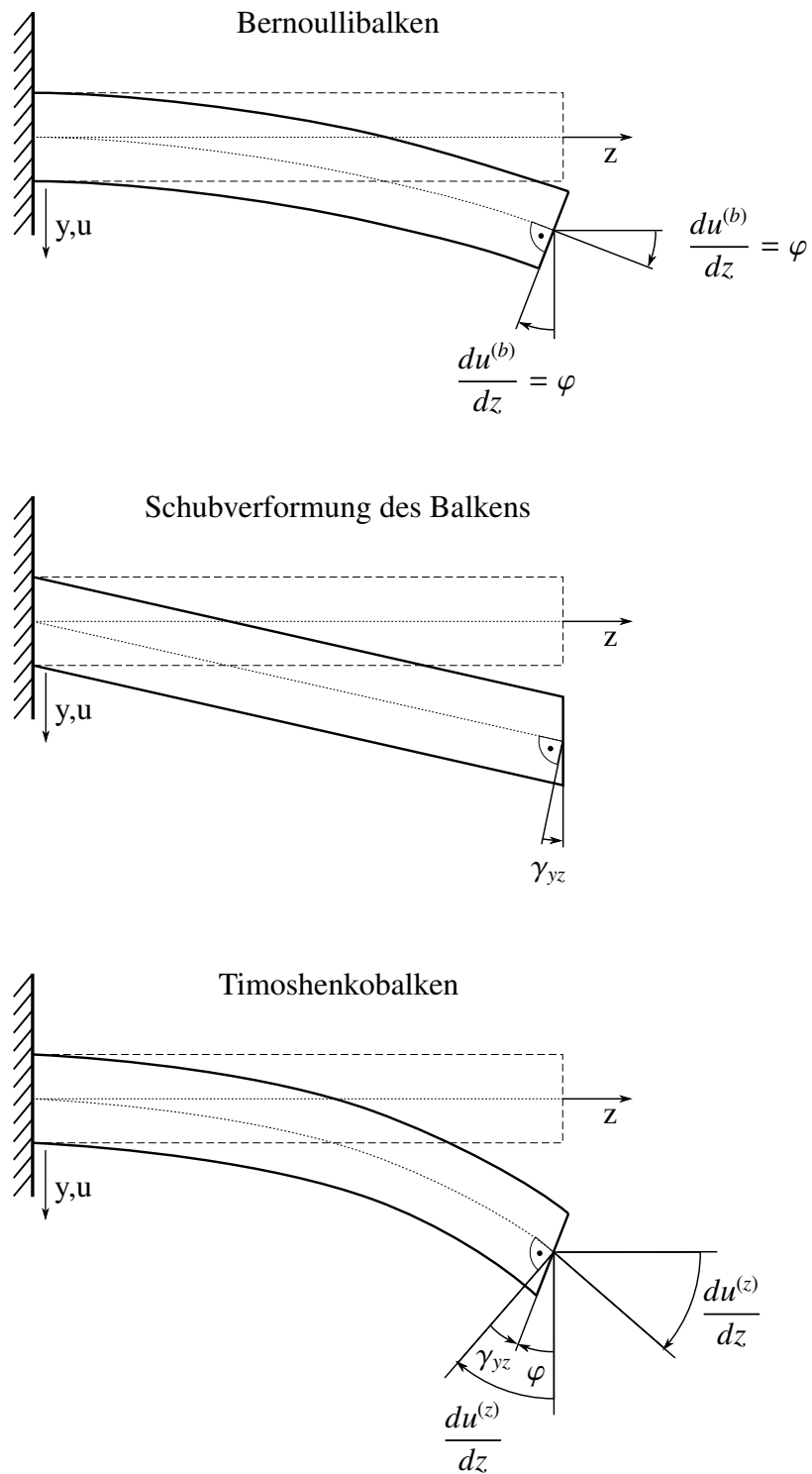


Abbildung 5.2.: Überlagerung der Biege- und Schubverformung eines Balkens nach der Theorie von Timoshenko

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

$$\frac{du^{(z)}(z)}{dz} = \gamma_{yz}(z) + \phi(z) \quad (5.12)$$

die Gleichung für die Gesamtbiegung, die nach dem Einsetzen von 5.10 und 5.12

$$\frac{du^{(z)}(z)}{dz} = \frac{Q(z)}{\kappa_b AG} + \int \frac{-M_{bx}(z)}{EI_{xx}} dz \quad (5.13)$$

ergibt. Der Querkraftverlauf kann aus Abbildung 5.1 abgeleitet werden.

$$Q(z) = F + q(l - z) \quad (5.14)$$

Gleichung 5.14 und 5.2 in Gleichung 5.13 eingesetzt und integriert liefert

$$\begin{aligned} \frac{du^{(z)}(z)}{dz} = & \frac{1}{\kappa_b AG} [F + q(l - z)] + \\ & \frac{1}{EI_{xx}} \left[ Mz + F \left( -\frac{z^2}{2} + lz \right) + q \left( \frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{2} + \frac{l^2 z}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

was mit weiterer Integration

$$\begin{aligned} u^{(z)}(z) = & \frac{1}{\kappa_b AG} \left[ Fz + q \left( lz - \frac{z^2}{2} \right) \right] + \\ & \frac{1}{EI_{xx}} \left[ \frac{Mz^2}{2} + F \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{lz^2}{2} \right) + q \left( \frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{6} + \frac{l^2 z^2}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

die Verformungslinie für den schubweichen Balken liefert.

### 5.2.3. Klassische Anwendungsgrenzen von schubstarren Balken

Für das hier verwendete Modell eines einseitig eingespannten Balkens mit rechteckigem Querschnitt und den Werten aus Tabelle 5.1 ist  $q = 0$ ,  $F = 1$ ,  $M = 0$  und  $z = l$ . Wie bereits von Beitz [BKD90, S. C25] dargestellt, ergibt sich daraus das Verhältnis von Schubanteil  $u^{(s)}$  zu Biegeanteil  $u^{(b)}$  der Verformung mit

$$\frac{u^{(s)}}{u^{(b)}} = \frac{18}{5} \cdot \frac{EI}{GA l^2} = \frac{18}{5} \cdot \frac{Y}{G \lambda^2}. \quad (5.17)$$

Über

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

$$\lambda = \sqrt{12} \cdot \frac{l}{h} \quad (5.18)$$

erhält man für das Verformungsverhältnis aus Gleichung 5.17

$$\frac{u^{(s)}}{u^{(b)}} = 0.3 \cdot \frac{Yh^2}{Gl^2}. \quad (5.19)$$

Durch  $0.3 \cdot \frac{Y}{G} \approx 1$  kann es vereinfacht werden zu

$$\frac{u^{(s)}}{u^{(b)}} \approx \frac{h^2}{l^2} \quad (5.20)$$

Ein Schlankheitsgrad  $l/h$  von 10 ergibt somit

$$\frac{u^{(s)}}{u^{(b)}} \approx 0.01. \quad (5.21)$$

Meistens werden schubstarre Balken ab Schlankheitsgraden von 10 bis 20 verwendet [Mc10]. Ist der Schlankheitsgrad darunter, sollte die Theorie schubweicher Balken angewendet werden.

In Bezug auf diese Arbeit soll ein Metamodell, das auf Stützpunkten des schubstarren Balkens beruht, durch wenige Stützpunkte des schubweichen Balkenmodells zu einem Multilevel-Metamodell vereint werden, sodass es auch für kleine Schlankheitsgrade gültig ist.

### 5.3. Parameterauswahl

Als Parameter dieses Anwendungsfalls sollen solche ausgewählt werden, die einen nichtlinearen und möglichst starken Einfluss auf den Schubanteil der Balkenverformung haben. Aus Gleichung 5.17 eignet sich zum einen  $l$  und zum anderen die Balkenhöhe, da sie über  $A$  und  $I$  einen nichtlinearen Einfluss auf die Schubverformung hat.

Daraus folgen in Tabelle 5.2 die Parameter und ihre Grenzen. Sie sind derart gewählt, dass Bereiche im Entwurfsraum existieren, die das Kriterium aus Gleichung 5.17 verletzen und solche, die es erfüllen. Dadurch soll der Effekt des schubweichen Balkens zwischen Basismetamodell und Zielmetamodell bzw. Multilevel-Metamodell erkennbar sein.



## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

Parameter Name	Formelzeichen	Definitionsbereich [m]
Balkenlänge	$l$	$1 \leq l \leq 11$
Balkenhöhe	$h$	$0.1 \leq h \leq 0.5$

Tabelle 5.2.: Größen des Entwurfsraums

Abbildung 5.3 veranschaulicht in a) die Verformungen in Abhängigkeit von Balkenlänge und -höhe. Des Weiteren sind relative c) und absolute d) Unterschiede zwischen den beiden Modellen dargestellt. Weiterhin sind Iso-Verformungsverhältnislينien für  $u^{(s)}/u^{(b)}$  dargestellt, an denen das Basismodell aufgrund zu großer Fehler ungültig wird.

Vergleicht man den relativen und absoluten Fehler aus Abbildung 5.3 c) und d), so zeigt sich ein gegensätzliches Verhalten. Die Maxima des relativen Fehlers sind bei kleinen Balkenlängen und großen Balkenhöhen, wohingegen die Maxima des absoluten Fehlers bei großen Balkenlängen und kleinen Balkenhöhen auftreten. Für die Gütebewertung von Krigingmodellen liefern somit die auf Differenzen basierenden Metriken  $e_{MSE}$  und  $e_{RMSE}$  im Bereich von großen Balkenlängen und kleinen Balkenhöhen höhere Fehlerwerte. Die relativen Metriken  $e_{MSRE}$  und  $e_{RMSRE}$  bewerten Modellunterschiede im Bereich kleiner Balkenlängen und großer Balkenhöhen stärker.

Wie auch in Gleichung 5.21 zeigt sich, dass relative Modellfehler ein geeigneteres Bewertungskriterium sind als absolute Modellfehler. Daher wird im Weiteren Wert auf Bewertungsverfahren gelegt, die den Fehler relativ bewerten.

### 5.4. Sensitivitätsanalyse

Die Parameter werden mithilfe der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Verfahren Differenzenquotient an einer Nominalstelle, Korrelation und der Methode nach Morris aus Abschnitt 4.3 auf ihre Sensitivität untersucht. Hierfür wird stets das Basismodell verwendet, denn nach den Bedingungen aus Unterabschnitt 4.9.2 soll es den globalen Trend des Zielmodells gut wiedergeben. Die Sensitivität wird für beide Zielgrößen  $u$  und  $\log_{10}(u)$  ermittelt.

Für dieses Testszenario wurden die Parameter im Abschnitt 5.3 fest ausgewählt. Somit werden sie mit den Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse nicht weiter reduziert. Es sollen jedoch die Möglichkeiten zur Identifikation der sensitiven Parameter und stochastische Einflüsse aufgezeigt werden.

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

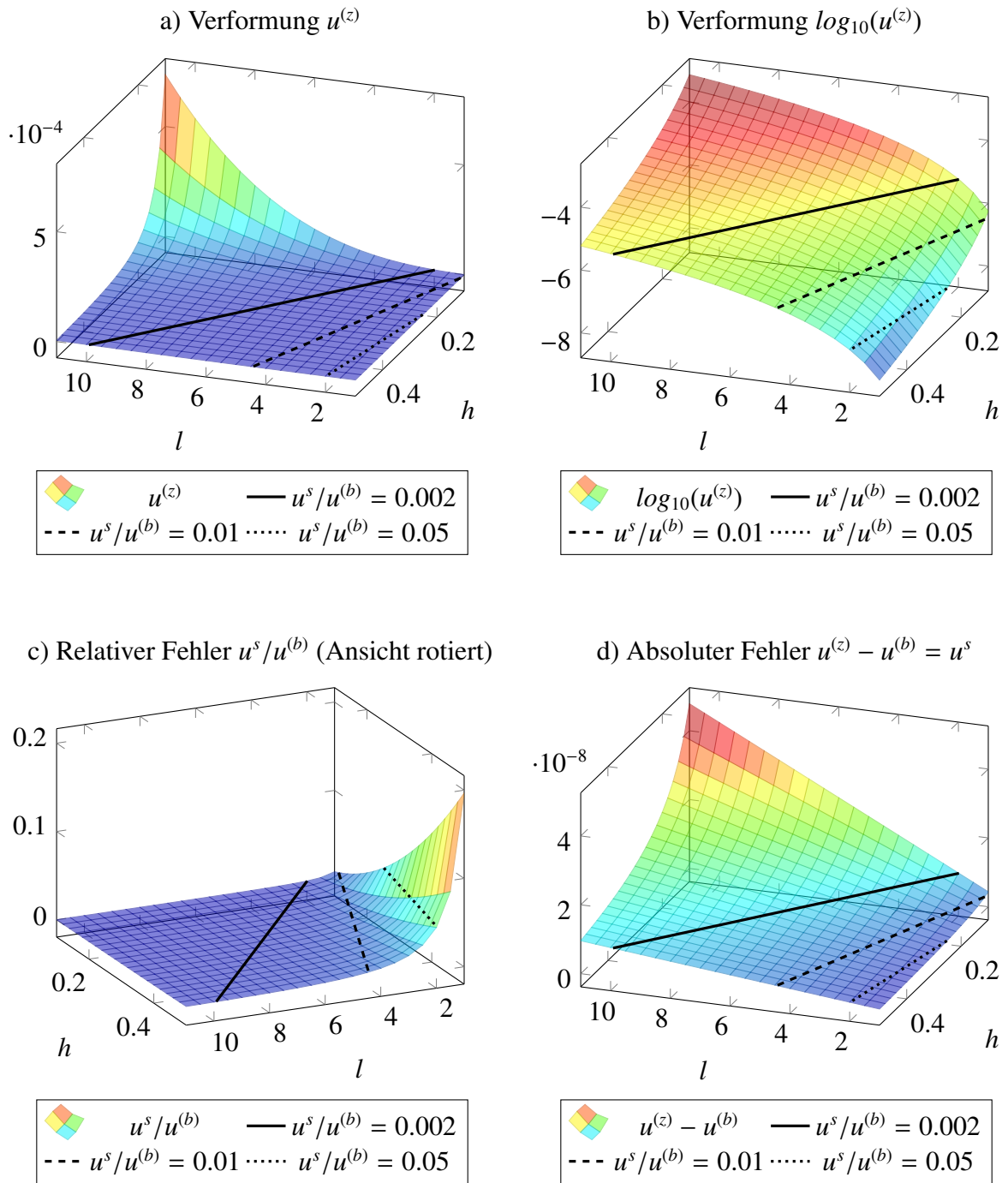


Abbildung 5.3.: a) Verformung eines schubweichen Balkens; b) Logarithmische Verformung eines schubweichen Balkens; c) Verhältnis zwischen Schub- und Biegeverformung (Ansicht rotiert) d) Differenz zwischen Verformungen des schubweichen und schubstarken Balkens. Alle Abbildungen beinhalten die Iso-Verhältnislينien  $u^{(s)}/u^{(b)} = \{0.002, 0.01, 0.05\}$ .

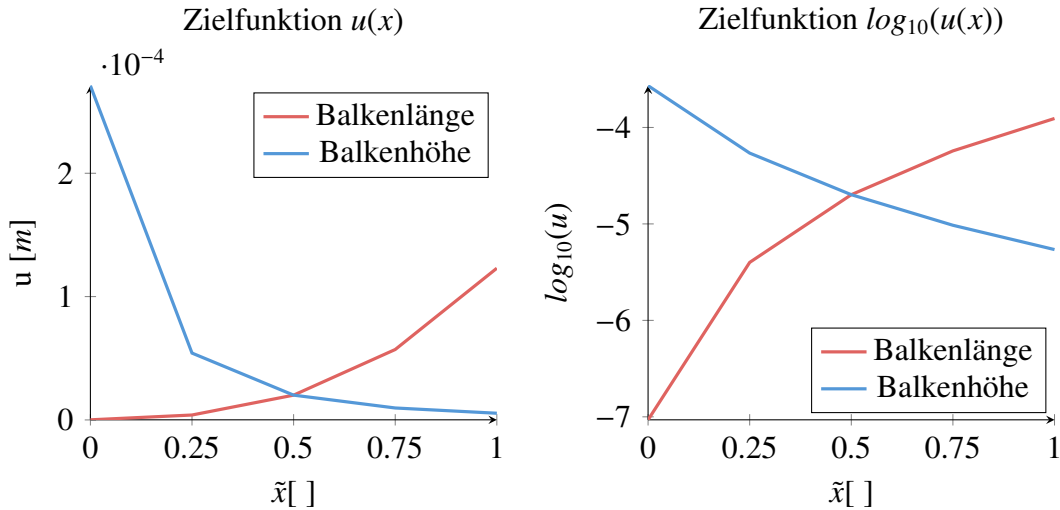


Abbildung 5.4.: Verformung des Balkens um die Nominalstelle herum

### 5.4.1. Differenzenquotient an einer Nominalstelle

Zur Ermittlung der Differenzenquotienten an einer Nominalstelle  $\xi_{out}$  werden mit  $n_l = 5$  vier Bereiche pro Parameter zur Ermittlung von Differenzenquotienten verwendet. Dazu sind insgesamt  $n_l * d = 12$  Modellauswertungen nötig. Die ermittelten Funktionsverläufe sind in Abbildung 5.4 links für das Basismodell und rechts für den Logarithmus des Basismodells dargestellt.

Die Differenzenquotienten  $\alpha_i$  aus Gleichung 4.30, welche aus den Funktionsverläufen ersichtlich sind, gewichten die Parametersensitivitäten zwischen rechter und linker Abbildung unterschiedlich. In der linken Abbildung sind die Differenzenquotienten für große Balkenlängen am größten, wohingegen sie rechts für kleine Balkenlängen ihre Maxima erreichen. Die größten Änderungen sind links für die Balkenhöhe und rechts für die Balkenlänge zu beobachten. Ursächlich hierfür ist die Verwendung der Verformungsdifferenzen im nicht-logarithmischen Fall und von Verformungsverhältnissen im logarithmischen Fall, was über

$$\alpha_i = \frac{\log_{10}(u(\tilde{x})) - \log_{10}(u(\tilde{x} + \Delta))}{\Delta} = \frac{\log_{10}\left(\frac{u(\tilde{x})}{u(\tilde{x} + \Delta)}\right)}{\Delta} \quad (5.22)$$

gezeigt wird. Damit werden links absolute und rechts relative Unterschiede bewertet.

Wenn die Krigingmodellgüte der Balkenverformungen mit einer relativen Metrik wie  $e_{RMSRE}$  aus Gleichung 4.105 bewertet wird, folgt hieraus, dass die Sensitivitäten der logarithmischen Zielfunktion ein geeigneteres Maß sind als die Sensitivitäten der nicht-logarithmischen Ziel-

funktion.

### 5.4.2. Korrelation und Morris-Methode

Im Gegensatz zum vorherigen Verfahren ist der berechnete Korrelationskoeffizient ein nicht-deterministischer Wert, da die Versuchsplanerstellung nicht-deterministisch ist. Über eine Konvergenzanalyse kann ein Richtwert für die nötige Größe der Stichprobe aufgestellt werden.

Als Näherung des korrelationsbasierten Sensitivitätskoeffizienten  $\xi_{corr}$  werden für die Stichprobengrößen  $n_X = \{10, 30, 100, 300, 1000, 3000\}$  jeweils 100 Sensitivitätskoeffizienten ermittelt, von denen Erwartungswert  $E(\xi_{1,corr}, \dots, \xi_{100,corr})$  und Standardabweichung  $\sigma(\xi_{1,corr}, \dots, \xi_{100,corr})$  gebildet werden können. Dies wird auch für den Sensitivitätskoeffizienten  $\xi_{morris}$  durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.5 a) und b) für die Korrelation und in c) und d) für die Morris-Methode veranschaulicht. Es zeigt sich, dass für alle Varianten der Mittelwert gegen den Zielwert und die Standardabweichung gegen Null konvergieren.

Die Verteilung der Sensitivitätskoeffizienten  $E(\xi_{corr})$  der logarithmischen Zielfunktion sind bereits bei 30 Teststellen außerhalb des  $1 - \sigma$ -Bereichs. Damit ist die Wahrscheinlichkeit hoch, dass die Klassifikation der Parameter nach deren Sensitivität korrekt ist.

Wie im vorherigen Abschnitt ist auch hier der Wechsel des einflussreichsten Parameters von der Balkenhöhe in a) bzw. c) zur Balkenlänge in b) bzw. d) zu erkennen, wobei Letzteres auf den logarithmischen Verformungen basiert. Zusätzlich zeigt sich, dass die Standardabweichungen im Fall der logarithmischen Verformungen b) bzw. d) kleiner sind als in a) bzw. c). Dadurch ist im logarithmischen Fall die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Klassifikation der Parametersensitivitäten bei gleicher Stützpunktzahl höher.

Die Standardabweichungen für den Sensitivitätskoeffizienten nach Morris sind im Vergleich zu denen des korrelationsbasierten Sensitivitätskoeffizienten deutlich höher. Mit dieser Methode müssen somit mehr Stützpunkte für eine richtige Klassifikation ermittelt werden.

### 5.4.3. Bewertung der verwendeten Sensitivitätsanalysemethoden

Um die Ergebnisse der drei Verfahren vergleichen zu können, wird aus jedem vorgestellten Ergebnis der normierte Sensitivitätskoeffizient  $\tilde{\xi}$  aus Gleichung 4.31 ermittelt, in Tabelle 5.3 angegeben und in Abbildung 5.6 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse der nicht-logarithmischen Zielfunktion sehr stark schwanken. Die auf der logarithmischen Zielfunktion basierenden Sensitivitätskoeffizienten haben bedeutend geringere Unterschiede.

Üblicherweise dient die Sensitivitätsanalyse zur Parameterreduktion, welche für diesen An-

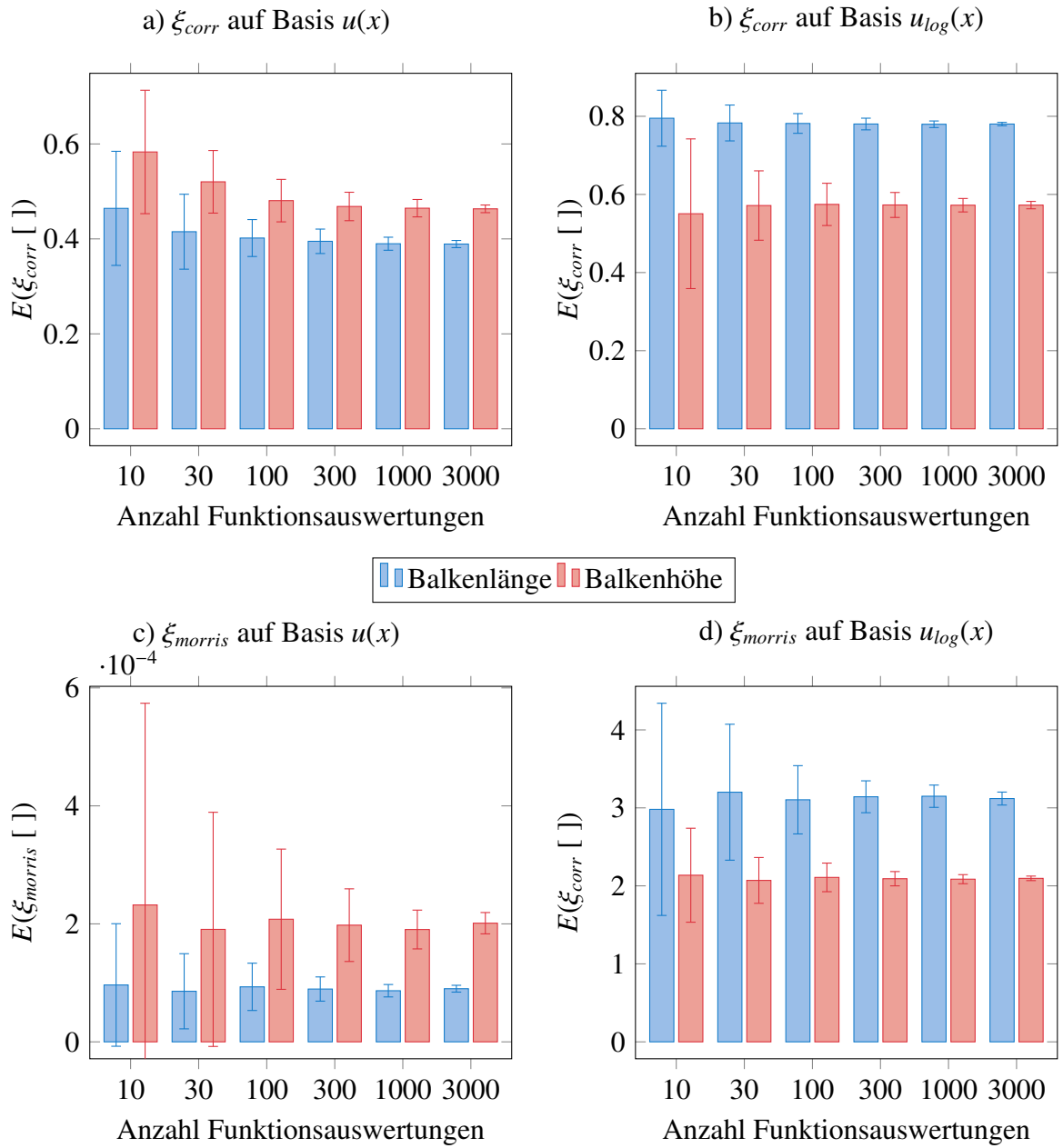


Abbildung 5.5.: Erwartungswerte der Sensitivitätskoeffizienten und deren Standardabweichungen von 100 Versuchen für die Stützstellenmengengrößen  $n_X = \{10, 30, 100, 300, 1000, 3000\}$ .

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

Sensitivitätskoeffizient	Zielfunktion $u(x)$		Zielfunktion $\log_{10}(u(x))$	
	Balkenlänge	Balkenhöhe	Balkenlänge	Balkenhöhe
$\xi_{oat}$	2.72e-05	1.18e-04	3.124	2.097
$\xi_{cor}$	0.390	0.457	0.776	0.576
$\xi_{morris}$	8.40e-05	1.88e-04	3.048	2.082
$\tilde{\xi}_{oat}$	0.230508475	1	1	0.671254802
$\tilde{\xi}_{cor}$	0.853391685	1	1	0.742268041
$\tilde{\xi}_{morris}$	0.446808511	1	1	0.683070866

Tabelle 5.3.: Sensitivitätskoeffizienten der Parameter Balkenlänge  $l$  und Balkenhöhe  $h$  ermittelt mit den verschiedenen Sensitivitätsanalyseverfahren.

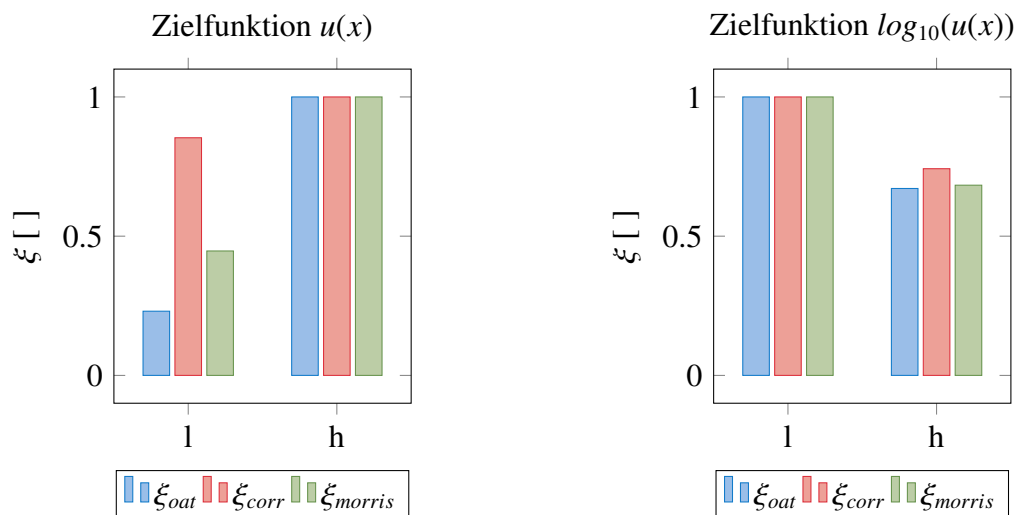


Abbildung 5.6.: Vergleich der skalierten Sensitivitätskoeffizienten von Balkenlänge  $l$  und Balkenhöhe  $h$  ermittelt mit den verschiedenen Sensitivitätsanalyseverfahren.

wendungsfall nicht durchgeführt wird. Jedoch zeigt die Analyse für die betrachteten Sensitivitätsanalyseverfahren den Vorteil einer Betrachtung der Sensitivitäten mit logarithmischen Werten. Die ermittelten Werte haben für diesen Anwendungsfall zum einen geringere Streuungen. Zum anderen bewerten sie die Modellunterschiede relativ, was für ein Modell, das relativ zu einem anderen Modell verglichen (siehe Gleichung 5.21) wird, vorteilhaft ist.

## 5.5. Krigingmodellerstellung und Genauigkeitsbewertung

### 5.5.1. Versuchsplanerstellung

Zur Erstellung der Krigingmodelle für die beiden Parameter Balkenlänge und Balkenhöhe wird das Latin-Hypercube-Verfahren aus Unterabschnitt 4.2.4 verwendet. Wie in Tabelle 5.4 dargestellt, hat das Basismodell mit 101 Stützstellen  $X^{(b)}$  eine bedeutend höhere Informationsbasis als das Zielmodell mit 5 Stützstellen  $X^{(z)}$ . Des Weiteren werden an 101 weiteren Stellen Testwerte mit dem Basis- und Zielmodell ermittelt. Da Krigingmodelle generell an ihren Rändern schlechter approximieren als im Zentrum und somit Ausreißer am Rand das Gesamtergebnis bedeutend verfälschen können, sind die Teststellen mindestens 5% von den Rändern entfernt

$$\hat{X}_{test} = (\tilde{x}_{test}^1, \dots, \tilde{x}_{test}^{101}), \quad \tilde{x}_{test}^i \in \tilde{\Omega}, 0.05 \leq \tilde{x}_{test}^i \leq 0.95 \quad (5.23)$$

erstellt. Aus den Stützstellen und den Ausgangsmodellen sind die Stützwerte wie folgt ermittelbar:

$$\begin{aligned} Y^{(b)} &= u^{(b)}(X^{(b)}) \\ Y^{(z)} &= u^{(z)}(X^{(z)}) \\ Y_{test}^{(b)} &= u^{(b)}(X_{test}) \\ Y_{test}^{(z)} &= u^{(z)}(X_{test}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die ermittelten Werte sind im Anhang B aufgelistet.

Modelltyp	Anzahl Stützstellen	Anzahl adaptiv hinzugefügter Stützstellen
$u^{(b)}$	101	10
$u^{(z)}$ und $u^{(zb)}$	5	4
$u_{test}^{(z)}$	101	0

Tabelle 5.4.: Anzahl der Stützstellen der verschiedenen Stützpunktmengen für das Basis- und Zielmodell, sowie deren Testpunkte

### 5.5.2. Multilevel-Metamodell der Balkenverformung

Mit den gegebenen Stützpunkten wird aus Gleichung 4.76 das Basismetamodell  $\hat{u}^{(b)}$  über den Stützpunkten des Basismodells gebildet. Das Multilevel-Metamodell kombiniert nun das Basismetamodell und die Zielmodellstützpunkte über Gleichung 4.94. Zusätzlich wird das klassische Zielmetamodell  $\hat{u}^{(z)}$  durch Gleichung 4.76 ausschließlich über den Stützpunkten des Zielmodells als Vergleichsbasis gebildet.

Abbildung 5.7 a) veranschaulicht das Basismetamodells  $\hat{u}^{(b)}$ . Zusätzlich sind die Teststellen  $X_{test}^{(b)}$  auf dieses Krigingmodell projiziert dargestellt. Dieses Modell ähnelt dem Modell  $u^{(z)}$  aus Abbildung 5.3 a) qualitativ. Betrachtet man die Schnitte für eine konstante Balkenlänge Abbildung 5.7 b) und eine konstante Balkenhöhe Abbildung 5.7 c) zeigt sich ein ein schwankender statt gleichmäßiger Verlauf des Basismetamodells. Zusätzlich sind negative Balkenverformungen vorhanden, die bei der gegebenen Belastung nicht auftreten dürfen. Die Approximation des Modells ist somit ungenügend.

In Abbildung 5.8 ist das Zielmetamodell  $\hat{u}^{(z)}$  in a) und b), sowie das Multilevel-Metamodell  $\hat{u}^{(zb)}$  in c) und d) dargestellt. Da das Zielmetamodell aus 5 Stützpunkten erstellt wird, ist der Unterschied zwischen Zielmetamodell und Zielmodell sehr groß, was Abbildung b) verdeutlicht. Zusätzlich sind die Verformungen großteils im negativen Bereich.

Die Approximation des Multilevel-Metamodells in Abbildung 5.8 d) liefert geringere Fehler als das Zielmetamodell  $\hat{u}^{(z)}$ , ist jedoch ebenfalls unzureichend. Es vereint die Nachteile des Basismetamodells mit dem schwankenden Kurvenverlauf und den Nachteil des Zielmetamodells mit dem großen Bereich negativer Werte.

Tabelle 5.5 zeigt die Werte der Gütekriterien aus Abschnitt 4.7 auf Seite 91. In den ersten vier Zeilen werden die Werte des Basismodells  $u^{(b)}$  sowie der drei Krigingmodelle  $\hat{u}^{(b)}$ ,  $\hat{u}^{(z)}$  und  $\hat{u}^{(zb)}$  mit den Testwerten des Zielmodells verglichen. Der Vergleich mit Testpunkten hat die höchste Aussagekraft, da er mit unabhängigen Testpunkten vergleicht, die nicht mit den Trainings-Stützpunkten und dem Krigingmodell interagieren.



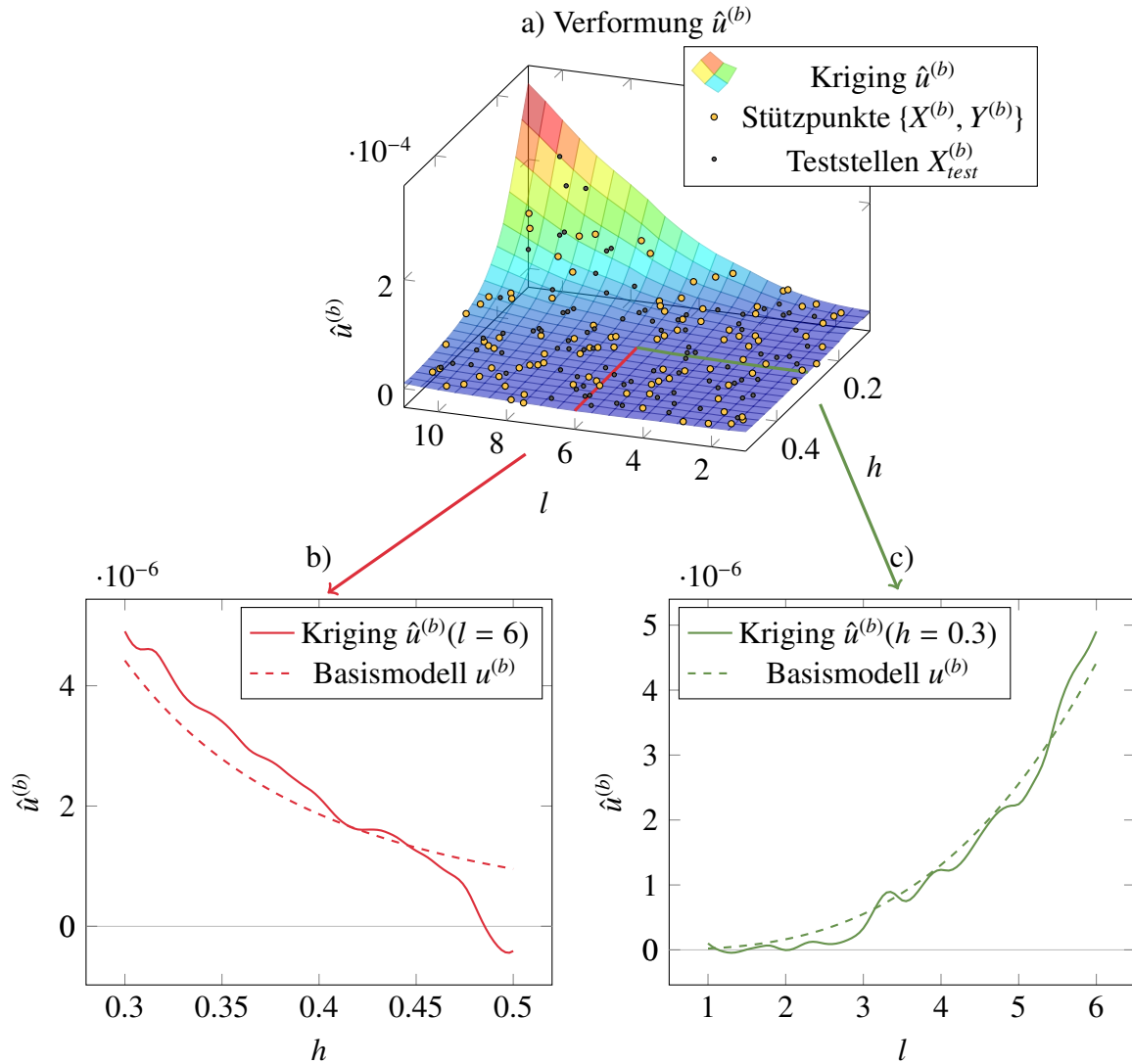


Abbildung 5.7.: a) Krigingmodell aus den 101 gegebenen Basismodellstützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Basismodell mit  $l = 6$  und  $h \in \mathbb{R}|0.3 \leq h \leq 0.5$ . c) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Basismodell mit  $l \in \mathbb{R}|1 \leq l \leq 6$  und  $h = 0.3$

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

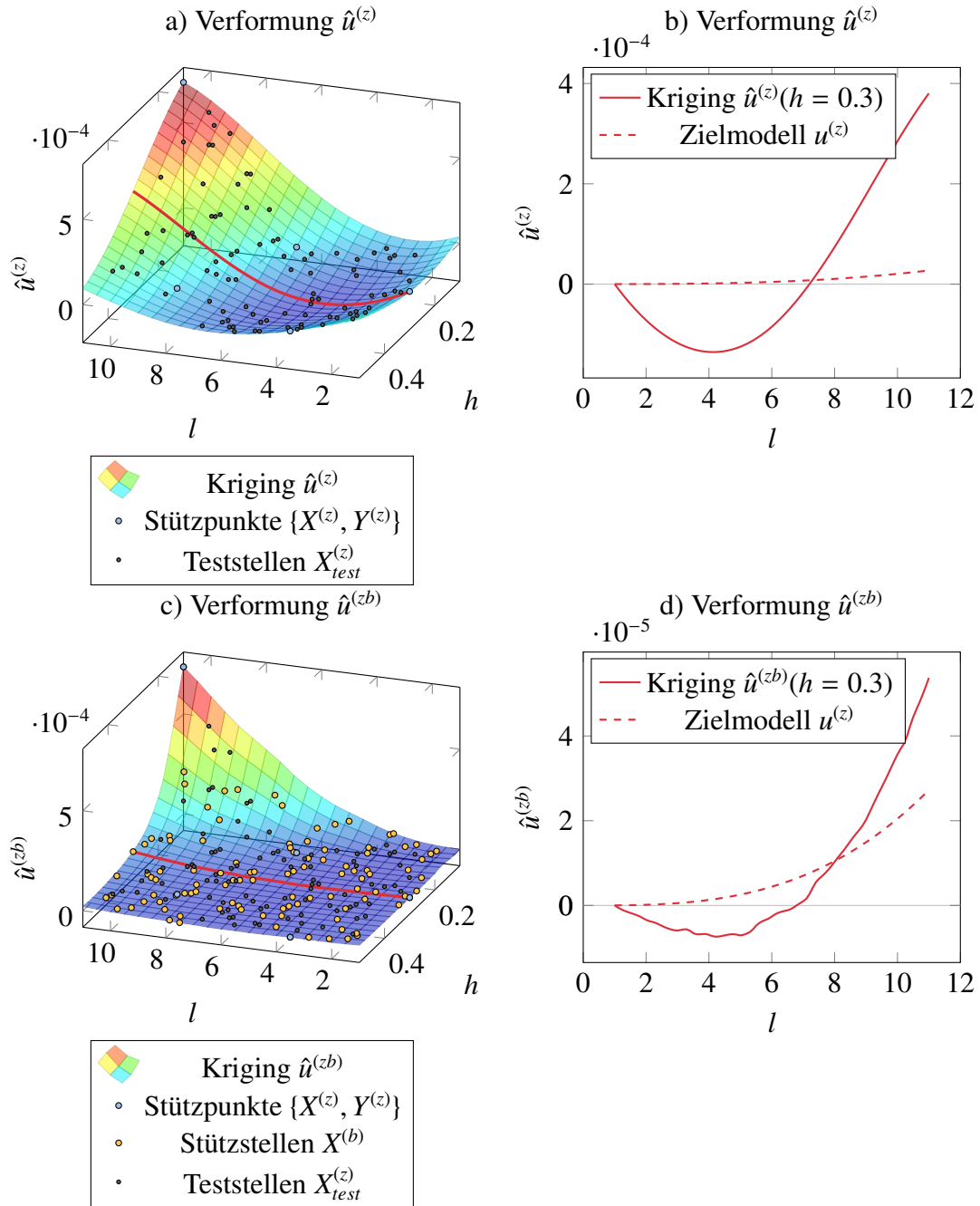


Abbildung 5.8.: a) Krigingmodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Zielmodell mit  $l \in \mathbb{R} | 1 \leq l \leq 11$  und  $h = 0.3$ . c) Multilevel-Metamodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen und dem Basismetamodell mit seinen Stützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. d) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Zielmodell mit  $l \in \mathbb{R} | 1 \leq l \leq 11$  und  $h = 0.3$ .

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

Fehlermetrik	Vergleichswerte	$u^{(b)}$	$\hat{u}^{(b)}$	$\hat{u}^{(z)}$	$\hat{u}^{(zb)}$
$e_{MSE}$	$Y_{test}^{(z)}$	1.53e-16	1.13e-10	2.18e-08	1.61e-09
$e_{RMSE}$	$Y_{test}^{(z)}$	1.24e-08	1.06e-05	1.48e-04	4.01e-05
$e_{MSRE}$	$Y_{test}^{(z)}$	1.07e-04	0.069	0.800	0.353
$e_{RMSRE}$	$Y_{test}^{(z)}$	0.010	0.262	0.894	0.594
$e_{MSE}$	$\hat{Y}_{X/\{x_i\}}$		8.75e-13	1.16e-07	3.08e-08
$e_{RMSE}$	$\hat{Y}_{X/\{x_i\}}$		9.35e-07	3.40e-04	1.76e-04
$e_{MSRE}$	$\hat{Y}_{X/\{x_i\}}$		0.120	0.864	0.549
$e_{RMSRE}$	$\hat{Y}_{X/\{x_i\}}$		0.347	0.929	0.741

Tabelle 5.5.: Fehlerwerte der Krigingmodelle  $\hat{u}^{(b)}$ ,  $\hat{u}^{(z)}$  und  $\hat{u}^{(zb)}$  in Abhängigkeit verschiedener Fehlermetriken. Die ersten vier Metriken vergleichen mit den Testdaten des Zielmodells, die anderen Metriken vergleichen mit den Kreuzvalidierungswerten. Zum Vergleich sind die Fehlerwerte des Basismodells  $u^{(b)}$  im Vergleich zu den Zielmodelltestpunkten dargestellt.

In den Zeilen 5 bis 8 der Tabelle werden die Vorhersagen der Modelle mit den Kreuzvalidierungswerten  $\hat{Y}_{X/\{x_i\}}$  aus Gleichung 4.96 verglichen. Da die Kreuzvalidierung jeweils einen Stützpunkt auslöst, verschlechtert sich meist die Approximation an dieser Stelle. Die Kreuzvalidierung hat andererseits den Vorteil, dass keine zusätzlichen Testpunkte erzeugt werden müssen.

Es zeigt sich, dass im Vergleich zu den Testwerten des Zielmodells alle Krigingmodelle bedeutend größere Fehler als das Basismodell  $u^{(b)}$  aufweisen und somit ungenügend sind. Auch die Fehler mit den Kreuzvalidierungswerten sind sehr hoch mit  $e_{RMSRE}$  von 0.262 für  $\hat{u}^{(b)}$ , 0.894 für  $\hat{u}^{(z)}$  und 0.594 für  $\hat{u}^{(zb)}$ .

Verursacht werden diese schlechten Approximationen durch das asymptotische Verhalten in Kombination mit dem hohen Quotienten aus minimaler und maximaler Verformung mit

$$\frac{\max(|u^{(b)}|)}{\min(|u^{(b)}|)} = \frac{7.4e-4}{4.4e-9} = 1.68E05. \quad (5.25)$$

Somit existiert ein großer Bereich mit kleinen absoluten Unterschieden. Jedoch ist der im Kriging modellierte stochastische Prozess stationär (Gleichung 4.48) und die Varianz damit konstant. Hieraus ergibt sich eine sehr hohe Varianz im Vergleich zu den kleinen absoluten Unterschieden. Zusätzlich existieren durch die lineare Regression der 5 Zielmodellstützpunkte Bereiche im Parameterraum mit negativen Werten liefern.

Ein Krigingmodell aus Gleichung 4.76 ist für die gegebenen Stützwerte kein passendes Verfahren für eine Problemstellung, deren Wertebereich mehrere Größenordnungen umfasst. Im Korrelationsanteil des

### 5.5.3. Krigingmodell der logarithmischen Balkenverformung

Die bisherigen Erkenntnisse zeigen, dass sowohl die Wahl der Stützstellen als auch die Wahl der Zielgröße maßgeblich die Approximationsgüte beeinflussen.

Um den bisherigen Wertebereich in einen Raum zu transformieren, der einen deutlich geringeren relativen Abstand des kleinsten zum größten Wert aufweist und keine negativen Verformungswerte ermöglicht, eignet sich der Logarithmus <sup>1</sup>. Somit ist

$$u_{log}^{(b)} = \log_{10}(u^{(b)}) \quad (5.26)$$

das logarithmische Basismodell,

$$u_{log}^{(z)} = \log_{10}(u^{(z)}) \quad (5.27)$$

das logarithmische Zielmodell,

$$\hat{u}_{log}^{(b)} = \log_{10}(\hat{u}^{(b)}) \quad (5.28)$$

das logarithmische Basismetamodell,

$$\hat{u}_{log}^{(z)} = \log_{10}(\hat{u}^{(z)}) \quad (5.29)$$

das logarithmische Zielmetamodell und

$$\hat{u}_{log}^{(zb)} = \log_{10}(\hat{u}^{(zb)}) \quad (5.30)$$

das logarithmische Multilevel-Metamodell.

Mit der Einführung des Logarithmus wird der Quotient vom maximalen zum minimalen Wert mit

$$\frac{\max(|u_{log}^{(b)}|)}{\min(|u_{log}^{(b)}|)} = \frac{|\log_{10}(7.4e-4)|}{|\log_{10}(4.4e-9)|} \approx \frac{8.4}{3.1} \approx 2.7 \quad (5.31)$$

im Vergleich zu Gleichung 5.25 mit 1.7e5 bedeutend kleiner. Zusätzlich ist der logarithmische Kurvenverlauf näher an einer Gerade als der nicht-logarithmische, was in Abbildung 5.3 b) zu erkennen ist.

<sup>1</sup>Zur besseren Lesbarkeit wird der dekadische Logarithmus verwendet.

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

Die Eigenschaften des Logarithmus schränken seine Anwendbarkeit auf einen Wertebereich größer 0 ein. Die hier beschriebenen Anwendungsfälle der Balkenbiegung und der Beullast unter einem Lastrichtungswinkel liefern ausschließlich positive Werte, weswegen diese Einschränkung in den vorgestellten Anwendungen erfüllt ist. Die Verwendung von Quotienten wie bei  $e_{MSRE}$  und  $e_{RMSRE}$  ist im logarithmischen Raum ungünstig, da für  $u = 1$  ist  $\log_{10}(1) = 0$  eine Division durch Null erfolgt. Im Folgenden werden die Metriken mit Werten berechnet, die in den nicht-logarithmischen Raum transformiert wurden. So sind die Metriken mit denen aus dem vorherigen Abschnitt vergleichbar.

Abbildung 5.9 veranschaulicht das logarithmische Basismetamodell  $\hat{u}_{log}^{(b)}$ . In Abbildung a) und b) ist das Modell direkt visualisiert, wobei in c) und d) die Werte dieses Modells in den nicht-logarithmischen Raum zurücktransformiert sind. Die Vergleiche mit dem Basismodell  $u_{log}^{(b)}$  in b) bzw.  $u^{(b)}$  in d) zeigen eine deutlich bessere Approximation als im vorherigen Abschnitt in Abbildung 5.7. Im gleichen Skalenbereich sind keine Approximationsfehler wie Nulldurchgänge oder wellige Funktionsverläufe vorhanden. Obwohl das Deformationsmaximum schlecht durch Stützstellen abgedeckt ist, wird es bedeutend besser approximiert als im nicht-logarithmischen Modell.

In Abbildung 5.10 ist in a) und b) das aus den Zielstützstellen erzeugte Krigingmodell dargestellt. Hier ist ebenfalls eine deutliche Verbesserung der Approximation im Vergleich zum nicht-logarithmischen Krigingmodell zu erkennen. Es erfolgt kein Nulldurchgang und die Abweichungen sind deutlich kleiner. Da das Modell auf sehr wenigen Stützpunkten basiert, ist die Approximation jedoch weiterhin bedeutend schlechter als die des Basis- oder Multilevel-Metamodells.

Die Abbildungen 5.10 c) und d) zeigen das Multilevel-Metamodell, welches das Zielmodell ebenso deutlich besser approximiert als das auf den nicht-logarithmischen Werten basierende Multilevel-Metamodell.

Tabelle 5.6 stellt die Fehlerwerte der einzelnen Metriken dar. Alle Vergleiche des Basismetamodells und des Multilevel-Metamodells zeigen eine deutliche Verbesserung um mindestens eine Größenordnung im Vergleich zum vorherigen Unterabschnitt. Dies verdeutlicht den Vorteil der logarithmischen Betrachtungsweise.

Ein Vergleich der Fehlerwerte des Basismetamodells  $pow_{10}(\hat{u}_{log}^{(b)})$  und des Zielmodells  $u^{(b)}$  zeigt, dass der relative Fehler  $e_{RMSRE}(Y_{test}^{(z)})$  mit jeweils rund 0.010 im gleichen Größenbereich liegt. Somit erreicht das Basismetamodell für die relative Metrik mit der gewählten Menge an Stützpunkten und deren zufälliger Verteilung die näherungsweise gleiche Güte als das Basismodell. Die absoluten Fehler des Basismetamodells mit  $e_{RMSRE}(Y_{test}^{(z)})$  sind hingegen um das

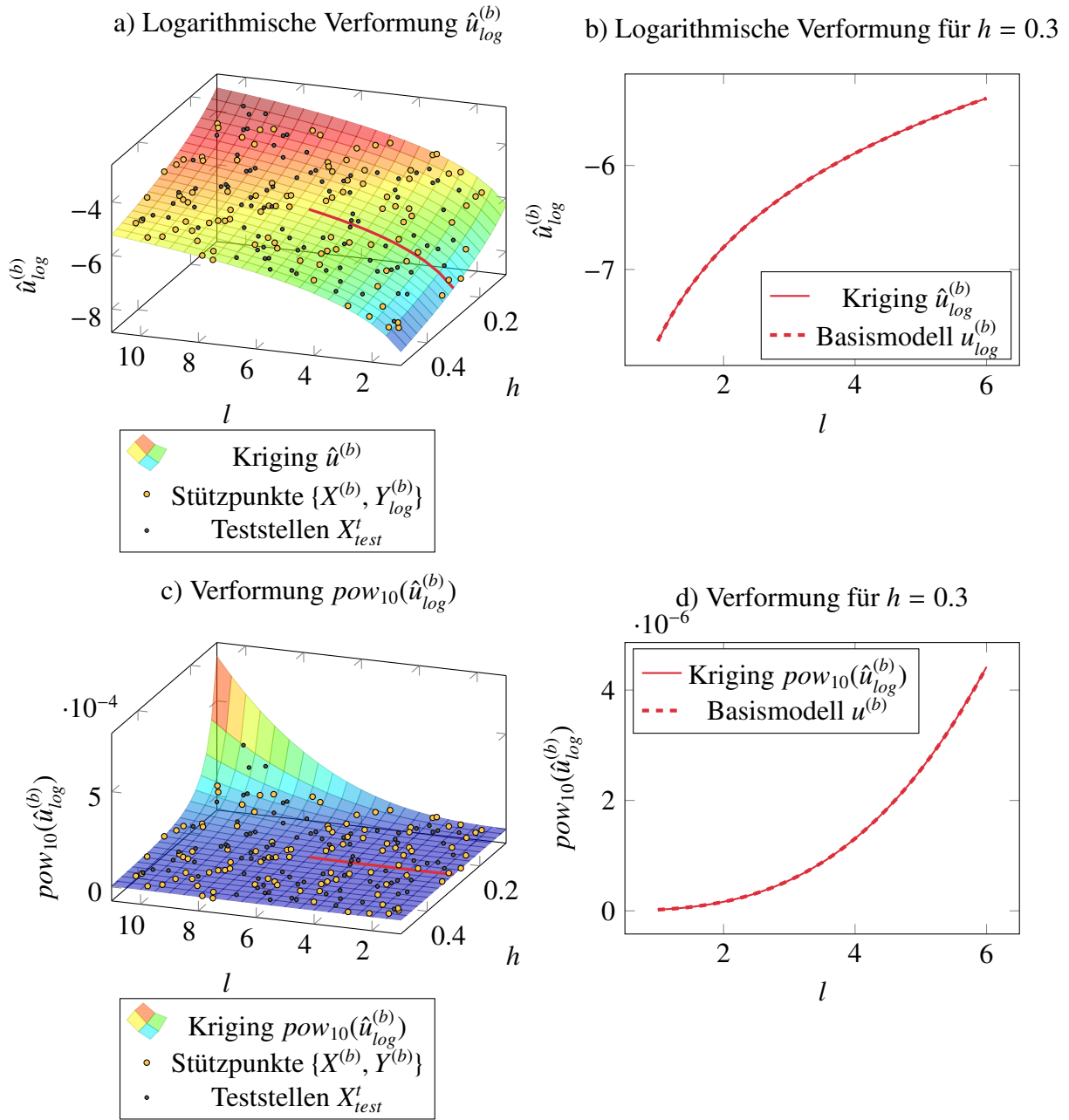


Abbildung 5.9.: a) Krigingmodell aus den 101 gegebenen logarithmischen Basismodellstützstellen  $\{X^{(b)}, Y_{log}^{(b)}\}$ . Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem Krigingmodell und Basismodell mit  $h = 0.3$  und  $l \in \mathbb{R} | 1 \leq h \leq 6$ . c) Krigingmodell im logarithmischen Raum, das in den nicht-logarithmischen Raum transformiert wurde. d) Ausschnitt aus dem Krigingmodell aus c) und Basismodell mit  $h = 0.3$  und  $l \in \mathbb{R} | 1 \leq h \leq 6$ .

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

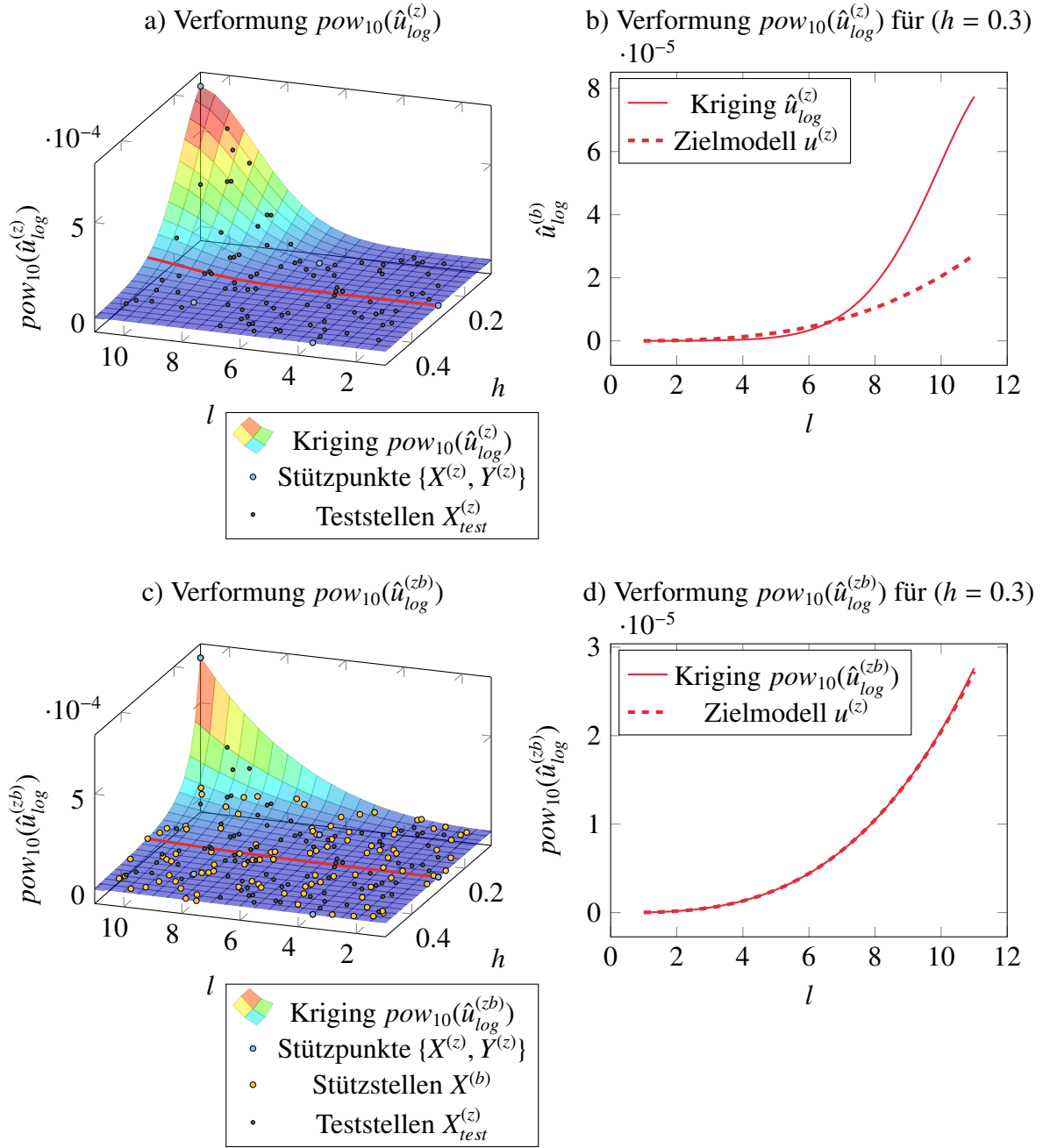


Abbildung 5.10.: a) Logarithmisches Krigingmodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen im nicht-logarithmischen Raum. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. b) Ausschnitt aus dem vorherigen Krigingmodell und Zielmodell mit  $h = 0.3$ . c) Logarithmisches Multilevel-Metamodell aus den 5 gegebenen Zielmodellstützstellen im nicht-logarithmischen Raum und dem Basismetamodell mit seinen Stützstellen. Zusätzlich sind die Stellen der Testpunkte auf das Krigingmodell projiziert. d) Ausschnitt aus dem vorherigen Krigingmodell und Zielmodell mit  $h = 0.3$ .

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

Fehlermetrik	Vergleichswerte	$u^{(b)}$	$pow_{10}(\hat{u}_{log}^{(b)})$	$pow_{10}(\hat{u}_{log}^{(z)})$	$pow_{10}(\hat{u}_{log}^{(zb)})$
$e_{MSE}$	$Y_{test}^{(z)}$	1.53e-16	2.18e-15	4.15e-09	3.48e-14
$e_{RMSE}$	$Y_{test}^{(z)}$	1.24e-08	4.67e-08	6.45e-05	1.87e-07
$e_{MSRE}$	$Y_{test}^{(z)}$	1.07e-04	1.09e-04	0.277	1.27e-04
$e_{RMSRE}$	$Y_{test}^{(z)}$	0.010	0.010	0.527	0.011
$e_{MSE}$	$pow_{10}(\hat{Y}_{X/\{x_i\},log})$		8.47e-16	8.65e-08	3.79e-12
$e_{RMSE}$	$pow_{10}(\hat{Y}_{X/\{x_i\},log})$		2.91e-08	2.94e-04	1.95e-06
$e_{MSRE}$	$pow_{10}(\hat{Y}_{X/\{x_i\},log})$		1.03e-05	0.636	2.80e-04
$e_{RMSRE}$	$pow_{10}(\hat{Y}_{X/\{x_i\},log})$		3.21e-03	0.798	0.017

Tabelle 5.6.: Fehlerwerte der Krigingmodelle  $\hat{u}_{log}^{(b)}$ ,  $\hat{u}_{log}^{(z)}$  und  $\hat{u}_{log}^{(zb)}$  in Abhängigkeit verschiedener Fehlermetriken. Im nicht-logarithmischen Raum vergleichen die ersten vier Metriken mit den Testdaten des Zielmodells und die anderen Metriken mit den Kreuzvalidierungswerten.

vierfache höher als die des schubstarren Balkenmodells  $u^{(b)}$ . Eine schlechte Abdeckung des Modellmaximums mit Basis-Stützstellen verursacht dies. So ist beim Modellmaximum der absolute Fehler

$$|\max(pow_{10}(\hat{u}_{log}^{(b)})) - \max(u^{(z)})| = |0.00073293 - 0.00073541| = 2.48e - 06 \quad (5.32)$$

was durch die gute Approximation in den anderen Modellbereichen ausgeglichen werden muss, um

$$RMS E(Y_{test}^{(z)}, pow_{10}(\hat{u}_{log}^{(b)}(X_{test}^{(z)}))) = 4.67e - 08 \quad (5.33)$$

zu erreichen.

Betrachtet man den Fehler zwischen Multilevel-Metamodell und Zielmodell aus Abbildung 5.10 d) zeigen sich große absolute Fehler für große Balkenlängen. Dort liefert die Approximation höhere Werte als die Zielfunktion. Dies führt zu dem schlechteren Fehlerwert für  $e_{MSRE}(Y_{test}^{(z)})$  verglichen mit dem Basismetamodell. Da die relativen Fehlerwerte  $e_{RMSRE}(Y_{test}^{(z)})$  des Multilevel-Metamodells mit 0.011 ähnlich hoch sind als die des Basismetamodells mit 0.010, muss die bessere Approximation des Multilevel-Metamodells im Bereich kleiner Deformationen (geringe Balkenlängen und große Balkenhöhen) liegen. Dort ist die Region der größten relativen Unterschiede zwischen Basis- und Zielmodell, die vom Multilevel-Metamodell durch die Verwendung der wenigen Zielmodellstützpunkte ausgeglichen wird.

Die schlechtere Approximation des Zielmetamodells im Vergleich zum Multilevel-Metamo-



dell bestätigt Hypothese 1 auf Seite 3 für diesen Anwendungsfall. Jedoch weist das Basismetamodell geringere Fehler als das hierarchische Krigingmodell auf, weswegen die Bildung eines Multilevel-Metamodells an dieser Stelle nicht sinnvoll ist.

#### 5.5.4. Krigingmodell mit adaptiv erweiterten Stützstellen

Die Genauigkeit eines Metamodells kann durch Hinzufügen weiterer Stützpunkte gesteigert werden. Mit einer adaptiven Erweiterung der Stützpunkte (siehe Abschnitt 4.8) mithilfe des MSE-Kriteriums oder des MSE-RelE-Kriteriums für Multilevel-Metamodelle kann ein initial schlecht bewertetes Krigingmodell eine bestimmte Zielgüte erreichen, indem Bereiche mit geringer Stützpunktabdeckung mit Stützpunkten aufgefüllt werden. Der Ablauf entspricht der inneren Schleife aus Abbildung 2.1 auf Seite 8.

Mögliche Konvergenzkriterien für das Hinzufügen neuer Stützstellen sind

- die Maximalanzahl neuer Stützstellen,
- eine maximale Rechenzeit und
- ein Gütekriterium.

Als Gütekriterium wird nach Sauerbrei und Freund [SF13, S. 47]

$$\eta_{KV} \cdot [\max(Y) - \min(Y)] < \max(Y - \hat{Y}_{X/\{x_i\}}) \quad (5.34)$$

verwendet, wobei die Zielgenauigkeit  $\eta_{KV}$  frei wählbar ist. Bei Sauerbrei und Freund wird sie mit 2% angesetzt.

Abbildung 5.11 veranschaulicht die Entwicklung der Fehlerwerte bei einem Hinzufügen von 95 weiteren Zielmodellstützstellen. Abbildung 5.11 a) zeigt die Entwicklung der Fehlerwerte in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützpunkte mit dem MSE-Kriterium und b) mit dem MSE-RelE-Kriterium. Die Abbildungen c) und d) stellen die finalen Stützpunktverteilungen mit den jeweiligen Kriterien dar. In Abbildung 5.11 d) ist eine leichte Häufung der Stützpunkte für kleine  $l$  und große  $h$  im Vergleich zu c) zu erkennen, was durch die Gewichtung des relativen Modellfehlers hervorgerufen wird und somit das MSE-RelErr-Kriterium verifiziert.

Es zeigt sich, dass der  $e_{RMSRE}$  verglichen mit den Teststellen eine Verschlechterung des Multilevel-Metamodells vom 5. bis zum 11. hinzugefügten Stützpunkt verursacht. Eine ähnliche Modellverschlechterung ist mit dem MSE-RelErr-Kriterium vom 2. bis 8. hinzugefügten Stützpunkt zu erkennen. Mit weiteren Hinzufügungen ist eine deutliche Modellverbesserung beider Varianten zu beobachten. Die Genauigkeit des Zielmetamodells  $\hat{u}_{log}^{(z)}$  ist nach dem Hinzufügen der 95 zusätzlichen Stützpunkte um ungefähr zwei Größenordnungen besser. Das Multilevel-

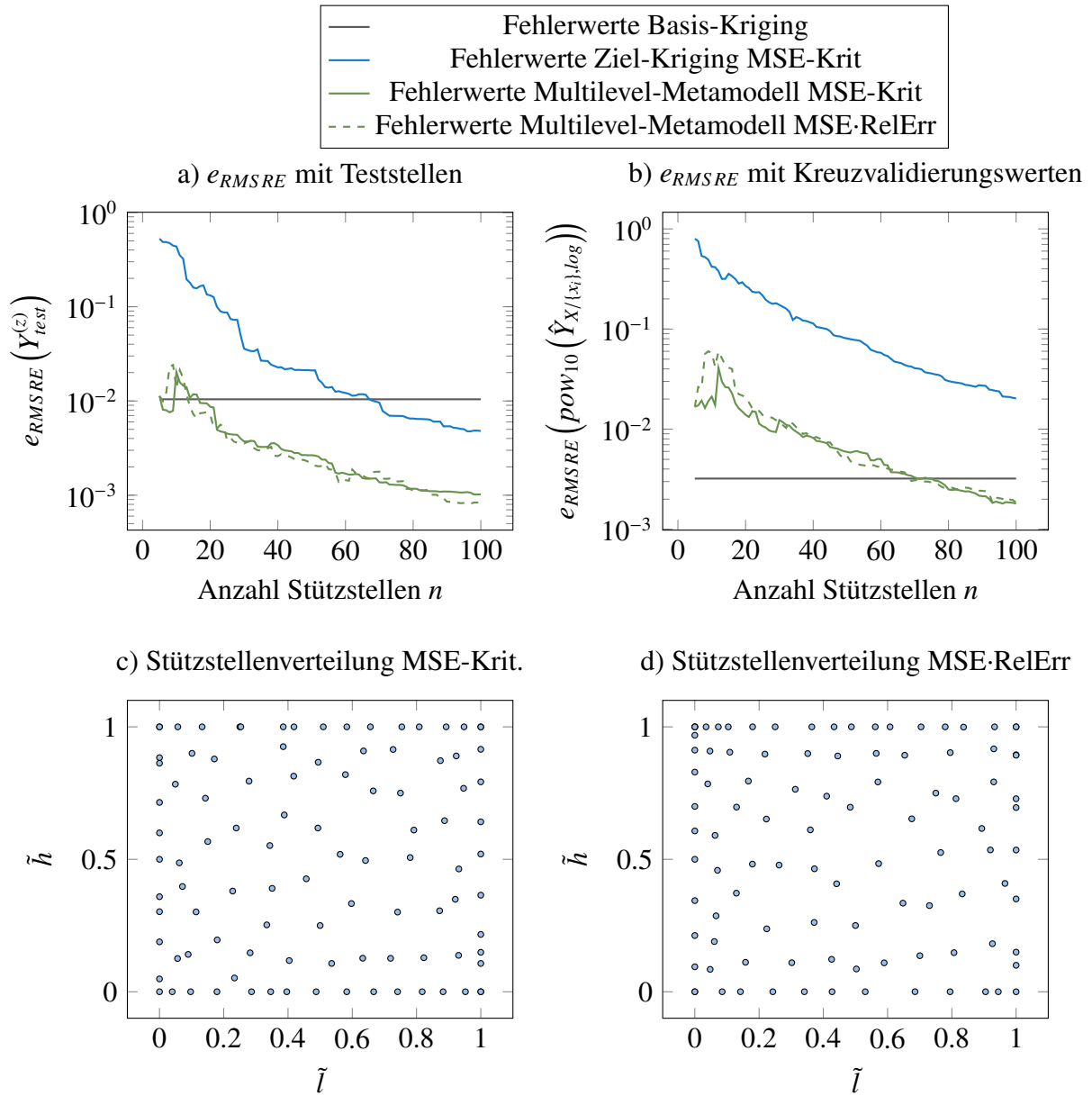


Abbildung 5.11.: Konvergenzverhalten der adaptiven Stützpunkterweiterung mit Zielmodellstützpunkten. a)  $e_{RMSRE}$  der Ziel-Teststellen und der Krigingmodellergebnisse b)  $e_{RMSRE}$  der Kreuzvalidierungswerte und der Krigingmodellergebnisse c) Finale Stützstellenverteilung mit dem MSE-Kriterium d) Finale Stützstellenverteilung mit dem MSE·RelErr-Kriterium

Metamodell reduziert seinen Fehler um etwa eine Größenordnung und hat gegenüber dem Zielmetamodell einen um das Vierfache geringeren Fehlerwert. Das Basismetamodell erfährt keine Verbesserung, da in der Studie ausschließlich Stützpunkte des Zielmodells hinzugefügt werden. Daran lässt sich aber erkennen, wie viele neue Stützpunkte der Zielfunktion nötig sind, um die Genauigkeit des Basismetamodells zu überschreiten.

Die  $e_{RMSRE}$ -Werte aus Abbildung 5.11 a) und 5.11 b) zeigen einen qualitativ ähnlichen Verlauf. Die Abstände zwischen dem Zielmetamodell und dem Multilevel-Metamodell sind in beiden Graphen gleichartig. Jedoch sind die Stellen der größeren Sprünge der Fehlerwerte nicht gleich. Daher kann das Hinzufügen einer Stützstelle einen gegenläufigen Effekt in beiden Metriken haben. Somit eignen sich die Fehlerwerte auf Basis der Kreuzvalidierung als Schätzer der Modellgüte bei steigender Stützpunktanzahl.

Mit dem MSE·RelErr-Kriterium wird die dritte hinzugefügte Stützstelle mit  $\tilde{l} = 0.073$  und  $\tilde{h} = 1$  in den Bereich des größten Fehlers zwischen Basis- und Zielmodell erzeugt. Hierdurch ist der relative Fehler in diesem Bereich kleiner als in anderen Regionen, weswegen die Skalierung mit dem relativen Fehler ihren Effekt verliert.

Als Erkenntnis dieser Studie liefert das restriktivere und aufwändigere MSE·RelErr-Kriterium keine signifikanten Modellverbesserungen im Vergleich zum MSE-Kriterium, weswegen Letzteres für das nächste Kapitel verwendet wird.

## 5.6. Bewertung der Fehler-Metriken

### 5.6.1. Bewertung von Metamodellen mit einem Level

Die Bewertung der Güte von Metamodellen erfolgt durch den Vergleich von Metamodellschätzungen  $\hat{Y}$  mit Vergleichswerten über Fehler-Metriken wie solche aus Abschnitt 4.7. Die Vergleichswerte sind in dieser Arbeit entweder Testwerte oder Kreuzvalidierungswerte aus Gleichung 4.96. Mit dem  $e_{RMSRE}$  als Metrik wird der Vergleich mit Testdaten als die aussagekräftigste Methode angesehen, da sie auf relativen Vergleichen basiert, das Krigingmodell nicht beeinflusst, die gleiche Größenordnung wie die Vergleichsfehlerpaare hat und eine Aussage über die Varianz der Vergleichswerte liefert. Da Testwerte durch Auswertungen des Ausgangsmodells ermittelt werden müssen, eignen sie sich nicht bei aufwändigen Ausgangsmodellen und sie erhöhen die Güte des Krigingmodells trotz des zusätzlichen Aufwands nicht.

Daher wird in diesem Abschnitt untersucht, welche der Metriken aus Abschnitt 4.7 auf Basis der Kreuzvalidierungswerte vergleichbare Ergebnisse wie  $e_{RMSRE}$  mit Testwerten liefert.

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

	Test	Kreuzvalidierung						
	$e_{RMSRE,T}$	$e_{MSE,K}$	$e_{RMSE,K}$	$e_{MSRE,K}$	$e_{RMSRE,K}$	$e_{MaxRE,K}$	$e_{MRE,K}$	$1 - r_K^2$
$e_{RMSRE,T}$	1.0	0.038	0.045	0.017	0.03	-0.02	0.19	0.038
$e_{MSE,K}$	0.038	1.0	0.94	0.2	0.22	0.15	0.27	0.96
$e_{RMSE,K}$	0.045	0.94	1.0	0.2	0.23	0.13	0.33	0.89
$e_{MSRE,K}$	0.017	0.2	0.2	1.0	0.97	0.93	0.79	0.21
$e_{RMSRE,K}$	0.03	0.22	0.23	0.97	1.0	0.94	0.86	0.24
$e_{MaxRE,K}$	-0.02	0.15	0.13	0.93	0.94	1.0	0.67	0.17
$e_{MRE,K}$	0.19	0.27	0.33	0.79	0.86	0.67	1.0	0.28
$1 - r_K^2$	0.038	0.96	0.89	0.21	0.24	0.17	0.28	1.0

Tabelle 5.7.: Korrelation der Fehlerwerte  $e_{RMSRE,T}$ ,  $e_{MSE,K}$ ,  $e_{RMSE,K}$ ,  $e_{MSRE,K}$ ,  $e_{RMSRE,K}$ ,  $e_{MaxRE,K}$ ,  $e_{MRE,K}$  und  $1 - r_K^2$  aus 1000 Krigingmodellerstellungen mit je 101 Stützstellen. Die Krigingmodellwerte wurden für die Metriken mit Index  $T$  mit Testwerten und für Metriken mit Index  $K$  mit Kreuzvalidierungswerten verglichen.

Daher sollten die Metriken eine möglichst hohe positive Korrelation zu diesem Fehlerwert aufweisen. Hierfür werden zwei Arten von Untersuchungen durchgeführt. Zum einen wird die Korrelation der Metriken bei konstanter Stützstellenanzahl untersucht. Diese soll zeigen, wie sehr die Metriken bei identischen Testbedingungen korrelieren. Zum anderen wird die Korrelation der Metriken bei wachsender Stützstellenanzahl untersucht, was dem Szenario der adaptiven Stützpunkterweiterung entspricht.

### Fehlermetriken bei konstanter Stützpunktzahl

Zur Untersuchung mit konstanter Stützstellenanzahl werden 1000 Krigingmodelle Größe  $n = 101$  erstellt. Anschließend werden über die adaptive Stützpunkterweiterung 10 weitere Stützstellen hinzugefügt.

Tabelle 5.7 veranschaulicht die Korrelation der Fehlerwerte aus den 1000 Ausführungen. Eine erwartete Korrelation des  $e_{RMSRE,T}$  mit den Fehlerwerten auf Basis der Kreuzvalidierungswerte ist nicht zu erkennen. Daraus kann geschlossen werden, dass die auf Kreuzvalidierungswerten basierenden Fehlermetriken zum Vergleich der Modellgüte zweier Metamodelle mit gleicher Stützpunktzahl nicht verwendet werden können.

Vergleicht man die Korrelationen der Kreuzvalidierungsdaten untereinander, so ergeben sich

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

	Test	Kreuzvalidierung						
	$e_{RMSRE,T}$	$e_{MSE,K}$	$e_{RMSE,K}$	$e_{MSRE,K}$	$e_{RMSRE,K}$	$e_{MaxRE,K}$	$e_{MRE,K}$	$1 - r_K^2$
$e_{RMSRE,T}$	1.0	0.43	0.45	0.68	0.77	0.63	0.78	0.44
$e_{MSE,K}$	0.43	1.0	0.95	0.32	0.4	0.29	0.44	0.87
$e_{RMSE,K}$	0.45	0.95	1.0	0.39	0.47	0.34	0.53	0.91
$e_{MSRE,K}$	0.68	0.32	0.39	1.0	0.96	0.91	0.9	0.41
$e_{RMSRE,K}$	0.77	0.4	0.47	0.96	1.0	0.94	0.96	0.48
$e_{MaxRE,K}$	0.63	0.29	0.34	0.91	0.94	1.0	0.82	0.35
$e_{MRE,K}$	0.78	0.44	0.53	0.9	0.96	0.82	1.0	0.54
$1 - r_K^2$	0.44	0.87	0.91	0.41	0.48	0.35	0.54	1.0

Tabelle 5.8.: Korrelation der Fehlermetriken  $e_{RMSRE,T}$ ,  $e_{MSE,K}$ ,  $e_{RMSE,K}$ ,  $e_{MSRE,K}$ ,  $e_{RMSRE,K}$ ,  $e_{MaxRE,K}$ ,  $e_{MRE,K}$  und  $1 - r_K^2$  aus 1000 Krigingmodellerstellungen aus 1000 Krigingmodellerstellungen mit 51 bis 100 Stützstellen. Die Fehlerwerte wurden für die Metriken mit Index  $T$  mit Testwerten und für Metriken mit Index  $K$  mit Kreuzvalidierungswerten erstellt.

zwei Mengen untereinander stark korrelierender Metriken:

1.  $e_{MSE,K}$ ,  $e_{RMSE,K}$ ,  $1 - r_K^2$ : Diese Metriken basieren auf dem Quadrat der Differenzen.
2.  $e_{MSRE,K}$ ,  $e_{RMSRE,K}$ ,  $e_{MRE,K}$ ,  $e_{MaxRE,K}$ : Diese Metriken basieren auf dem Quadrat der Quotienten.

Aus der hohen Korrelation von  $e_{MaxRE,K}$  mit  $e_{MSRE,K}$ ,  $e_{RMSRE,K}$  und  $e_{MRE,K}$  lässt sich schließen, dass die maximalen Quotienten einer Fehlermetrik einen hohen Einfluss auf den Gesamtfehler haben. Für das Modell  $pow_{10}(\hat{u}_{log}^{(b)})$  ohne Verfeinerung aus Tabelle 5.6 hat der maximale Quotient einen Anteil von 63% am Wert  $e_{RMSRE}(pow_{10}(\hat{Y}_{X/\{x_i\},log}))$ . Der große relative Fehler  $e_{MaxRE,K}$  befindet sich am Rand des Krigingmodells. Hier ist die Auswirkung des Auslassens einer Stelle  $x_i$  aus der Stützstellenmenge  $X$  in der Kreuzvalidierung besonders hoch, da im umliegenden Bereich weniger Stützpunkte sind als im Inneren des Parameterraums.

### Fehlermetriken bei steigender Stützpunktzahl

Für die Korrelation mit steigender Stützstellenanzahl werden 1000 Krigingmodellerstellungen durchgeführt, die auf 51 bis 100 initialen Stützstellen basieren. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.8 zusammengefasst. Es zeigt sich, dass die Korrelationen aller Metriken mit dem

Fehlerwert der Testwerte  $e_{RMSRE,T}$  bedeutend höher sind als in Tabelle 5.7. Hier zeigt sich der Zusammenhang zwischen Fehlerwert und Stützpunktanzahl, was bereits in Abbildung 5.11 im Vergleich von a) und b) sichtbar ist.

Hieraus lässt sich schließen, dass Metamodelle mit gleicher Stützpunktanzahl nicht miteinander auf Basis der Kreuzvalidierungswerte verglichen werden können. Für Metamodelle mit unterschiedlicher Stützpunktanzahl ist dieser Vergleich akzeptabel, wenn keine Testpunkte als Referenz vorhanden sind.  $e_{RMSRE,K}$  als auch  $e_{MRE,K}$  haben die höchsten Korrelationen zu  $e_{RMSRE,T}$ . Daher werden diese Metriken im Folgenden verwendet.

### 5.6.2. Bewertung Multilevel-Metamodelle

Multilevel-Metamodelle lassen sich mithilfe ihrer Kreuzvalidierungswerte prinzipiell genauso bewerten wie einfache Krigingmodelle, was im vorherigen Abschnitt diskutiert wurde. Zusätzlich sollte das Multilevel-Metamodell nicht schlechter sein als ein einfaches Krigingmodell auf Basis der Zielmodellstützstellen, was auch Hypothese 1 besagt. Dies ist über den  $e_{RMSRE,T}$  oder  $e_{RMSRE,K}$  vergleichbar.

## 5.7. Untersuchung der Methoden zur Versuchsplanerstellung

Der Versuchsplan eines Metamodells kann einen starken Einfluss auf die Modellgüte ausüben. Daher soll eine Bewertung der Methoden zur Versuchsplanerstellung aus Abschnitt 4.2 vorgenommen werden, um sie zum einen auf ihre Verteilungsgüte und zum anderen auf die Güte des erstellten Metamodells hin zu untersuchen. Dazu werden mit den Methoden Monte Carlo, Latin Hypercube, CVT und LCVT je 1000 Versuchspläne erzeugt und bezüglich ihrer Stützpunktverteilung nach dem Maximin-Kriterium aus Gleichung 4.13 und des Fehlers  $e_{RMSRE}$  bewertet, was in Abbildung 5.12 dargestellt ist. Hierbei bewertet die Maximin-Metrik direkt die Güte der Stützstellenverteilung. Der  $e_{RMSRE}$  bewertet einen abgeleiteten Wert, da hierfür Metamodelle erzeugt werden und mit Testpunkten verglichen werden.

Es zeigt sich, dass die Monte-Carlo Methode die größten Werte der Maximin-Metrik,  $e_{RMSRE}$  und Standardabweichungen aufweist, da hierbei jede Stützstelle zufällig und unabhängig voneinander erzeugt wird. Besonders die Standardabweichung der Maximin-Metrik ist sehr groß, da vereinzelt Versuchspläne erzeugt werden, bei denen zwei Stützpunkte eine äußerst geringe Norm haben und somit sehr nah nebeneinander sind. Der Latin Hypercube zeigt über die

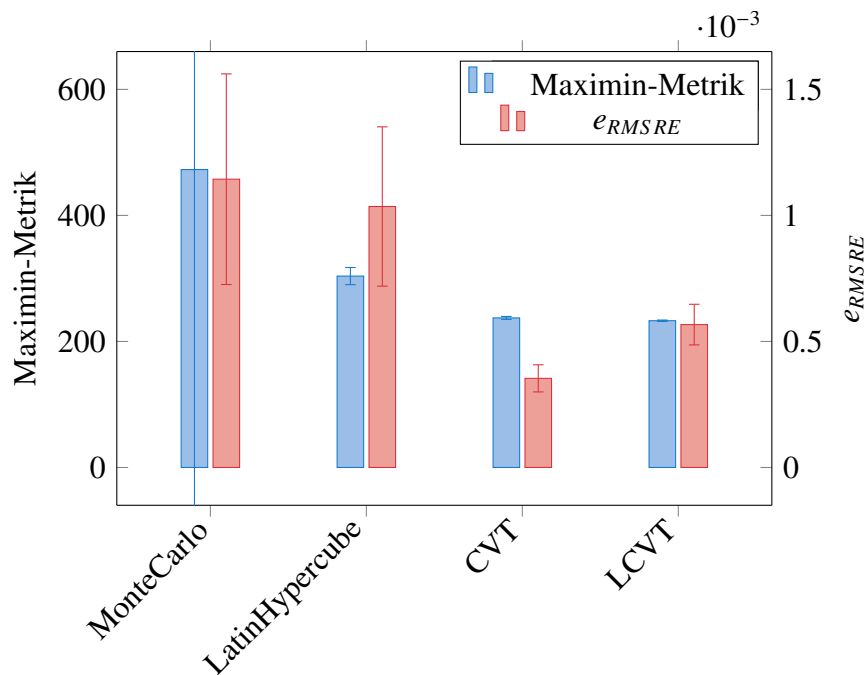


Abbildung 5.12.: Bewertung der Methoden zur Versuchsplanerstellung über Maximin-Metrik,  $e_{RMSRE}$  und ihre Standardabweichungen aus je 100 Versuchen.

Maximin-Metrik bessere Verteilungen, jedoch sind die Metamodellfehler nur unwesentlich kleiner im Vergleich zu Monte-Carlo. CVT und LCVT haben jeweils niedrigere Werte und Standardabweichungen. CVT weist die niedrigsten Metamodellfehler auf und liefert vergleichbare Werte der Maximin-Metrik. Hier zeigt sich der positive Effekt der guten Uniformität eines CVT, weswegen CVT im Folgenden verwendet wird.

## 5.8. Zusammenfassung

Dieses Kapitel diskutiert anhand eines einseitig eingespannten Biegebalkens einige wesentliche Aspekte, die zur Methodenauswahl, Kalibrierung und Analyse von Multilevel-Metamodellen beachtet werden müssen.

Aus dem Vergleich mit der Literatur zu Anwendungsgrenzen des schubstarren Balkens zeigt sich, dass eine verallgemeinerbare Fehlerbewertung durch relativen Modellvergleich durchgeführt werden muss. Hieraus folgt, dass dies ebenso auf die Methoden zur Metamodellbildung angewendet werden muss.

Es wird gezeigt, dass die Transformation der Funktionswerte mithilfe des Logarithmus eine erhebliche Modellverbesserung ermöglicht. Die Verwendung des Logarithmus ist sinnvoll,

## 5. Metamodellbildung am Beispiel Biegebalken

wenn die Ausgangsfunktion einen asymptotischen Verlauf zeigt und einen Wertebereich über mehrere Größenordnungen aufweist.

Das Verbesserungspotential der Kombination mehrerer Genauigkeitslevel zeigt sich durch den Vergleich der Fehlerwerte des Multilevel-Metamodells mit dem Zielmetamodell, was Hypothese 1 bestätigt. Diese Multilevel-Modellformulierung ermöglicht es, aus dem Modell des schubstarren Balkens mit seinen Gültigkeitsgrenzen ein Modell mit stark erweiterten Gültigkeitsgrenzen zu erzeugen.

Diese Transformation hat einen großen Einfluss auf die Parametersensitivitäten, was durch den Wechsel von absoluten zu relativen Vergleichen eine Umkehr der Sensitivitätsreihenfolge bewirkt.

Mit der adaptiven Stützpunkterweiterung ist eine Metamodellverbesserung bei schlechter initialer Stützstellenabdeckung möglich, jedoch führt ein Hinzufügen weniger Stützstellen nicht allgemein zu geringeren Fehlerwerten. Hierfür wird das MSE-Kriterium empfohlen. Das Kriterium MSE·ReIE bietet hier keine Genauigkeitsvorteile. Es zeigt aber die Anwendbarkeit der Schätzung des Modellfehlers zwischen Basis- und Zielmodell, was Hypothese 3 bestätigt.

Des Weiteren wird herausgearbeitet, dass über die Kreuzvalidierung und den  $e_{RMSRE}$  eine aussagekräftige Metrik zur Modellgütebewertung existiert, mit der keine weiteren Testpunkte erzeugt werden müssen. Als letzte Erkenntnis zeigt sich, dass CVT und LCVT im Vergleich zu Monte-Carlo und Latin Hypercube Versuchspläne mit besseren Stützstellenverteilungen erzeugen.



## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

Mit dem vorherigen Kapitel ist ein analytisch lösbarer und anschaulicher Anwendungsfall für die Erstellung von Multilevel-Metamodellen dargelegt. Die daraus ausgewählten Verfahren zu Metamodellerstellung und -bewertung sollen in diesem Kapitel mit dem linearen Stabilitätsanalyse eines orthotrop versteiften Paneels an einem industrierelevanten Anwendungsfall untersucht werden. Die folgende Vorgehensweise kann dem Prozess zur Metamodellbildung aus Abbildung 2.1 auf Seite 8 entnommen werden.

### 6.1. Zielstellung

#### 6.1.1. Zielgröße

In diesem Kapitel werden Multilevel-Metamodelle erstellt und ihre Einflussgrößen sowie Modellgüte im Vergleich zu einfachen Metamodellen untersucht. Diese Metamodelle beschreiben das lineare Beulverhalten von FVW-Paneelen.

Als Basismodell  $N^{(b)}$  dient das grob diskretisierte Modell aus Abschnitt 3.4 und das hochaufgelöste Modell aus Abschnitt 3.5 wird als Zielmodell  $N^{(z)}$  verwendet. Aus den Stützpunkten dieser Modelle kann anschließend das Basismetamodell  $\hat{N}^{(b)}$ , das Zielmetamodell  $\hat{N}^{(z)}$  sowie das Multilevel-Metamodell  $\hat{N}^{(zb)}$  erzeugt werden.

Als Zielgröße wird die Gesamtlast  $N$  des ersten Beulens als Kraftfluss ermittelt. Diese ergeben sich aus einem Druckanteil  $N_{x,crit}$  und einem Schubanteil  $N_{xy,crit}$  für das Basismodell aus Gleichung A.14 auf Seite 174 und für das Zielmodell aus Gleichung 3.20 auf Seite 39. Die Lastanteile können über Gleichung 3.17 zur Gesamtlast  $N_{crit}$  zusammengesetzt werden. Dieser Gesamtkraftfluss ist eine Homogenisierung der Lasten entlang der Paneelbreite  $l_y$ .

Auf Basis der in Unterabschnitt 5.5.3 gewonnenen Erkenntnisse werden die Stützwerte zur Metamodellerstellung mit dem dekadischen Logarithmus transformiert und damit das logarith-

misches Metamodell  $\hat{N}_{\log}(X, \log_{10}(Y))$  aus den Stützpunkten  $(X, Y)$  erzeugt. Das Metamodell  $\hat{N}$  besteht im gesamten Kapitel aus dem logarithmischen Metamodell und seiner Rücktransformation.

$$\hat{N} = 10^{\hat{N}_{\log}} \quad (6.1)$$

### 6.1.2. Zielgenauigkeit

Eine Zielgenauigkeit kann ein Schwellenwert darstellen, an dem der Prozess zur Metamodellerstellung aus Abbildung 2.1 mit einem akzeptierten Metamodell abgeschlossen werden kann.

Als erstes kann die Zielgenauigkeit eine Anforderung aus dem Entwurfsprozess sein. Diese Anforderungen liegen dieser Arbeit nicht vor.

Daher wird die Zielgenauigkeit in Relation zur Modellgüte des Zielmodells definiert. Folgende Fehler des Zielmodells werden dabei betrachtet.

- Unstetigkeiten des Zielmodells
- Fehler des Zielmodells durch Modelleinstellungen
- Fehler des Zielmodells im Vergleich zu höherwertigeren Aussagen

Der Fehler des Metamodells sollte nicht größer sein als die maximalen beobachteten Zielmodellfehler.

Die maximale beobachtete Unstetigkeit aus Abschnitt 3.5.5 beträgt 0.36%. Diese Unstetigkeiten sind in den Zielmodellstützpunkten enthalten, was im Krigingmodell durch die Regularisierung aus Gleichung 4.59 berücksichtigt wird.

Bei der Modellbildung werden Modelleinstellungen vorgenommen, deren Werte auf Basis von Konvergenzstudien festgelegt sind. So kann ein Fehler durch einen Vergleich der aufwändigsten und der verwendeten Modelleinstellung durchgeführt werden. Für die Elementdiskretisierung liegt dieser Wert bei 0.008% und für die Konvergenzstudie der Stringer- und Spantanzahl ist der Fehler 0.47%.

Weiterhin ist es möglich den Fehler des Zielmodells mit einem genaueren numerischen Modell oder einem Strukturtest zu betrachten. Die Validierung mit Strukturtests ist sehr aufwändig und von vielen weiteren Faktoren wie beispielsweise die mechanischen Eigenschaften der Testanlage abhängig (siehe Wilckens [Wil19]). Aufgrund des hohen Aufwandes und der im Folgenden diskutierten Imperfektionssensitivität wird der Vergleich mit Strukturtests hier nicht verfolgt.

Ein genaueres numerisches Modell ist die geometrisch nichtlineare Stabilitätsanalyse in der die Verformungen und damit die Steifigkeiten iterationsweise variieren können. Aus Abschnitt 3.3 und der darin referenzierten Literatur ist ersichtlich, dass die nichtlineare Stabilitätsanalyse maßgeblich von der Imperfektion der Struktur abhängig ist. Die lineare Stabilitätsanalyse beruht hingegen auf der Untersuchung der nominalen Struktur. Wolff [Wol12a, 4.2.3] zeigt diese Abhängigkeit qualitativ und Wilckens [Wil19, 5.4.3] quantitativ. Dabei werden die radialen Verschiebungen der Eigenformen in Abhängigkeit von der Hautdicke und einem Skalierungsfaktor  $t_H \cdot A_{imp}$  initial auf das Modell aufgebracht. Wilckens interpretiert für die dort untersuchten FVW-Paneele mit dünnen Häuten das Strukturverhalten bis zu  $A_{imp} = 5\%$  als Verzweigungsproblem mit abrupten Verschiebungsänderungen. Der Unterschied der ersten Beullast zwischen  $A_{imp} = 0\%$  und  $A_{imp} = 5\%$  beträgt für den Drucklastfall 13% und für den Schublastfall rund 20%. Diese relativen Fehler sind mit steigendem Skalierungsfaktor der Imperfektion stets Reduktionen der Beullast, was durch die gestrichelte Linie aus Abbildung 3.7 qualitativ dargestellt ist.

Da die lineare Stabilitätslösung Imperfektionen nicht berücksichtigt, ist ein Vergleich mit der nichtlinearen Lösung ohne Imperfektionen am sinnvollsten. Hier ergibt sich ein Fehler von ungefähr 3.6%.

Die Zielgenauigkeit lässt sich aus den obigen Betrachtungen nicht exakt festlegen. Durch die Unstetigkeiten des Zielmodells und durch unstetige erste Ableitungen in der Zielfunktion beim Wechsel des Stabilitätsmodus wird für das Metamodell eine höhere Regularisierung erforderlich sein, als bei einem stetigen Basis- und Zielmodell. Die Fehler aufgrund der Modelleinstellungen und die aus dem Vergleich mit geometrisch nichtlinearen Lösungen werden vom Metamodell nicht berücksichtigt. Daraus lässt sich eine Zielgenauigkeit von 1% bis 4% ableiten. Diese Zielgenauigkeit bezieht sich auf den mittleren relativen Fehler.

## 6.2. Parametrisierung eines Panels für die Stabilitätsanalyse

### 6.2.1. Konstante Größen

Mehrere Größen werden für das Problem als konstant angenommen, um den Parameterraum des Metamodells auf die sensitiven Parameter zu fokussieren.

### Spantgeometrie

Die geometrischen Parameter der Spante sind konstant, da sie für das Stabilitätsverhalten eines Panels als nicht sensitiv angesehen werden. Im Vergleich zu Stringern haben Spante eine bedeutend größere Biege- und Torsionssteifigkeit bei kleinerer Länge zwischen Versteifungskreuzungsstellen. Daher ist ihr Einfluss auf das Hautfeldbeulen über eine Interaktion des Spantes mit der Haut für mehrachsige Druck- und Schubbelastung gering und wird in dieser Arbeit vernachlässigt. Spante bewirken jedoch die Teilung des Hautfeldes in axialer Richtung. Dieser Parameter kann sensitiv sein und wird im Parameterraum berücksichtigt.

### Äußere Lasten

Es werden weiterhin ausschließlich mehrachsige Druck- und Schublasten betrachtet. Tangentiale Lasten und Lasten senkrecht zur Schalenebene werden nicht berücksichtigt.

### Andere konstante Größen

Größen, die weitere geometrische Parameter beschreiben, wie der Radius zwischen Stringersteg und Stringerfuß, Zwickelbereiche, Geometrie von Clips oder Klebschichtdicken werden nicht berücksichtigt, da von ihnen eine sehr geringe Sensitivität erwartet wird.

### Materialkennwerte

Die Materialeigenschaften der Einzellage können prinzipiell durch Werte des Steifigkeitstensors integriert werden. In dieser Arbeit werden sie jedoch als konstant angenommen und somit in der Metamodellerstellung nicht beachtet.

## 6.2.2. Parametrisierung eines Laminates

### Parametrisierung diskreter Einzellagen

Die Steifigkeitseigenschaften eines Laminates werden durch eine diskrete Anzahl von unidirektionalen Einzellagen mit variierenden Lagenwinkeln definiert. Alle Lagen haben in der Regel die gleiche Lagendicke. Daher wird eine Änderung der Steifigkeit durch das Hinzufügen oder Entfernen von Lagen vorgenommen. Des Weiteren kann die Hauptspannungsrichtung über die Lagenwinkel beeinflusst werden, die im Flugzeugbau üblicherweise auf  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$  und  $90^\circ$  begrenzt sind. Die  $0^\circ$ -Richtung beschreibt dabei die Hauptlasttrichtung.

Für die Versuchsplan- und Metamodellerstellung sowie Optimierungen sind die Lagenanzahl und Lagenorientierungen als Parameter nicht geeignet, da sie gegen die Regeln 1 und 3 aus Unterabschnitt 4.9.2 auf Seite 101 verstoßen. Der Wertebereich ist nicht stetig und der Definitionsbereich diskret. Weiterhin verursacht die variierende Lagenanzahl eine veränderliche Anzahl an Lagenwinkeln, wodurch die Dimension des Entwurfsraums variiert. Aufgrund dieser Eigenschaften können diskrete Einzellagen mit einem Metamodell nicht effektiv abgebildet werden.

### Vorstellung des verwendeten Parametrisierungsverfahrens

Eine Möglichkeit zur Parametrisierung eines Laminates sind die Lagendickenanteile ihrer Richtungen.

$$r_0, r_{45}, r_{-45}, \text{ sowie } r_{90}$$

Eine relative Parametrisierung ist vorteilhaft, da diese mit der Laminatdicke skaliert und somit Parametergrenzen für die Lagendickenanteile definiert werden können, die in einem sinnvollen Verhältnis zueinander stehen.

Da die Lamine nach [Niu10, Kap. 7] und [VDI06, Kap. 5.1.5] neben der Symmetrie auch die Eigenschaft der Ausgewogenheit aufweisen sollten, gilt

$$r_{45} = r_{-45} \quad (6.2)$$

und zusammenfassend ist

$$r_{\pm 45} = r_{45} + r_{-45}. \quad (6.3)$$

Um kein Extremum der Beullast durch eine einseitige Wahl der Schichtreihenfolge zu ermitteln, wird eine Mittelung des Einfluss der Lagenreihenfolge durch eine Homogenisierung durchgeführt. Als Homogenisierung wird modellhaft eine gleichmäßige Verteilung jeweils aller Lagen gleicher Richtung über die gesamte Laminatdicke  $t$  angenommen.

Hierbei wird die Exzentrizität der jeweiligen Lagen vernachlässigt. Entsprechend dieses Ansatzes ist jede Lage über die gesamte Laminatdicke von  $-t/2$  bis  $+t/2$  definiert. Die reduzierten Steifigkeitsmatrizen  $\bar{Q}_\alpha$  werden um  $r_\alpha$  skaliert.

Die ABD-Matrix lässt sich nun aus der MembranstEIFigkeit

$$A = \sum_{\alpha \in \{0,90,45,-45\}} r_{\alpha} \cdot \bar{Q}_{\alpha} \cdot t, \quad (6.4)$$

und Biegesteifigkeit

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\alpha \in \{0,90,45,-45\}} r_{\alpha} \cdot \bar{Q}_{\alpha} \cdot t \cdot \left( \frac{t^2}{12} + \underbrace{\left( z_1 - \frac{t}{2} \right)^2}_{=0} \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \{0,90,45,-45\}} r_{\alpha} \cdot \bar{Q}_{\alpha} \cdot \frac{t^3}{12} \end{aligned} \quad (6.5)$$

ermitteln. Die Koppelsteifigkeit  $B$  ist 0 aufgrund der Symmetrie des homogenisierten Lagenaufbaus.

Mit diesem Verfahren sind drei Parameter zur Laminatbeschreibung nötig. Hier werden die Parameter  $t$ ,  $r_0$  und  $r_{90}$  verwendet, wobei sich der letzte Wert aus

$$r_{\pm 45} = 1 - r_0 - r_{90} \quad (6.6)$$

ergibt.

Mit dieser einfachen Methode werden die mechanischen Einflüsse der Lagenreihenfolge nicht berücksichtigt. Eine Verbesserung dieser Parametrisierung stellen die „Lamination Parameters“ mit mindestens fünf Parametern dar, deren Herausforderungen im Ausblick 7.2.3 beschrieben sind.

### Quantifizierung des Einflusses der Schichtreihenfolge

Da die Lagenreihenfolge aufgrund dieser Vereinfachung nicht berücksichtigt ist, soll ihr Effekt quantifiziert werden. Beispielsweise beschreibt Zimmermann [Zim91, Kap. 6.1], dass die axiale Zylinderbeullast stark von der Schichtanordnung und der Lagenorientierung abhängt, was von Meyer [MPFGZ01] durch Zylindertests validiert wurde.

Für versteifte Schalenstrukturen können qualitativ vergleichbare Aussagen getroffen werden. In Tabelle 3.1 sind die Beullasten des Basismodells für die Lagenreihenfolgen  $[45, -45, 90, 0]_S$ ,  $[45, -45, 0, 90]_S$ ,  $[0, 45, -45, 90]_S$ ,  $[90, 45, -45, 0]_S$ ,  $[0, 90, 45, -45]_S$ ,  $[90, 0, 45, -45]_S$  sowie die Lagenreihenfolge des Referenzpaneels aus Tabelle 3.1 und der im Folgenden vorgestellten Homogenisierung dargestellt. Da das Referenzpaneel einen anderen Lagenaufbau

Lagenreihenfolge	Beullast [ $N/m$ ]	Normiert
$[45, -45, 90, 0]_S$	88223	1.02
$[45, -45, 0, 90]_S$	89357	1.04
$[0, 45, -45, 90]_S$	82520	0.96
$[90, 45, -45, 0]_S$	83304	0.97
$[0, 90, 45, -45]_S$	68468	0.79
$[90, 0, 45, -45]_S$	77557	0.90
Referenzpaneel	89821	1.04
homogenisiert	86129	1

Tabelle 6.1.: Beullasten von Paneelen mit unterschiedlichen Lagenreihenfolgen bzw. der homogenisierten Steifigkeitsmatrix. Die Lagendickenanteile  $t_\alpha$  jeder Lagenrichtung sind dabei konstant.

hat als die angegebenen Lagen, werden alle Lagendicken entsprechend der Lagendickenanteile  $r_\alpha$  des Referenzpaneels skaliert, wodurch eine Vergleichbarkeit gegeben ist. Alle weiteren geometrischen Parameter entsprechen denen des Referenzpaneels. Diese Variation führt zu gleichen A-Matrizen, jedoch zu unterschiedlichen D-Matrizen, welche die unterschiedlichen Beullasten verursachen.

Die Position der  $\pm 45^\circ$ -Lagen ist maßgebend für die Beullast. Abhängig von ihrer Anordnung außen oder innen im Lagenaufbau ist die ertragbare Beullast am höchsten bzw. am niedrigsten. Die Beullast des homogenisierten Paneels aus Tabelle 6.1 weicht um 4% von den maximalen Werten und den Werten der Lagenaufbauten  $[0, 45, -45, 90]_S$  und  $[90, 45, -45, 0]_S$  ab. Dies ist ein Kompromiss für eine von der Lagenreihenfolge unabhängige Parametrisierung. Vor allem Lamine mit mehr Lagen als die hier untersuchten haben wegen konstruktiver Regeln eine ausgeglichene Lagenreihenfolge.

### 6.2.3. Verwendete Parameter

Tabelle 6.2 stellt die initialen Parameter, die für die untersuchten Paneele Verwendung finden. Eine Beschreibung der geometrischen Größen findet sich im Abschnitt 3.1. Die Grenzen sind auf Basis von Erfahrungswerten für Leitwerke, Flügel und Rumpfe verschiedener Verkehrsflugzeuge und den dort auftretenden Kraftflüssen festgelegt. Sehr große Hautdicken finden keine Verwendung, da solche Bereiche nicht stabilitätskritisch sind und durch statische Festigkeits- und Dauerfestigkeitsrandbedingungen dimensioniert werden.

## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

Parameter Name	Formelzeichen	Nominalwert	Definitionsbereich
Lastrichtungswinkel	$\varphi$	0	$-5 \leq \varphi \leq 95$
Paneelradius	$r_y$	2.075	$1 \leq r_y \leq 4$
Stringerabstand	$b$	0.2	$0.1 \leq b \leq 0.3$
Seitenverhältnis Haut	$a/b$	2.921	$1 \leq a/b \leq 4$
Relative Stringerfußbreite	$b_F/b$	0.28	$0.1 \leq b_F/b \leq 0.4$
Relative Stringersteghöhe	$b_S/b$	0.16	$0.05 \leq b_S/b \leq 0.3$
Relative Hautdicke	$t_H/b$	0.006875	$0.005 \leq t_H/b \leq 0.02$
Relative Stringerfußdicke	$t_F/b$	0.006875	$0.005 \leq t_F/b \leq 0.02$
Relative Stringerkerndicke	$t_K/b$	0.0025	$0.00125 \leq t_K/b \leq 0.005$
Relative Fußdicke 0° Lagen	$r_{F0}$	$\overline{0.45}$	$0.35 \leq r_{F0} \leq 0.75$
Relative Fußdicke 90° Lagen	$r_{F90}$	$\overline{0.18}$	$0.1 \leq r_{F90} \leq 0.2$
Relative Hautdicke 0° Lagen	$r_{H0}$	$\overline{0.18}$	$0.1 \leq r_{H0} \leq 0.5$
Relative Hautdicke 90° Lagen	$r_{H90}$	$\overline{0.27}$	$0.1 \leq r_{H90} \leq 0.4$

Tabelle 6.2.: Initiale Parameter des Entwurfsraums

Einige Parameter aus Tabelle 6.2 sind im Verhältnis zum Stringerabstand definiert. Hierdurch ist es möglich kleine und große geometrische Ausprägungen einzubeziehen und gleichzeitig konstruktiv nicht sinnvolle Ausprägungen auszuschließen.

Ein Beispiel hierfür ist das Verhältnis der Biegesteifigkeiten von Haut und Stringer sowie von Haut und Stringersteg. Abbildung 6.1 stellt die in dieser Parametrisierung möglichen Biegesteifigkeiten aller Ecken im Parameterraum dar. Zusätzlich ist deren konvexe Hülle durch die gestrichelte Linie dargestellt. Diese beschreibt die Grenzen des Parameterraumes. An den schrägen Linien der konvexen Hülle zeigt sich, dass gegensätzliche Extrema der Biegesteifigkeiten ausgeschlossen sind. Diese ausgeschlossenen Paneelausprägungen bewirken deutlich niedrigere Beullasten als ausgewogene Steifigkeitsverhältnisse. Damit kann der Parameterraum auf das Wesentliche beschränkt werden.

Durch die abhängige Parametrisierung ist zusätzlich sichergestellt, dass es in jeder Ausprägung keine größere Fußbreite als den Stringerabstand geben kann, was eine konstruktive Randbedingung darstellt. Auf der anderen Seite ist die Parametrisierung so flexibel, dass die maximal mögliche Fußbreite den minimalen Stringerabstand überschreiten kann.



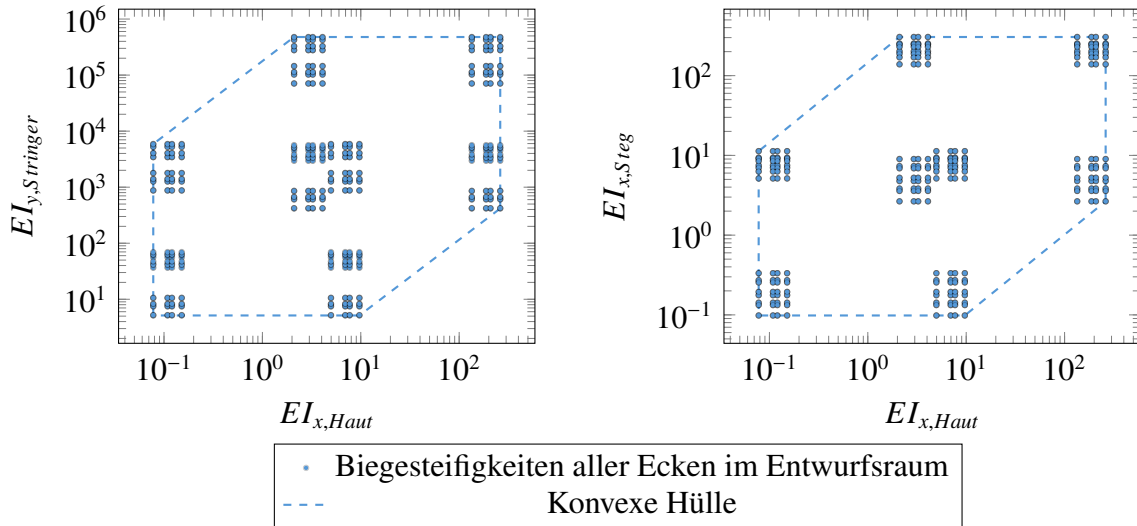


Abbildung 6.1.: Der vollfaktorielle Versuchsplan der Parameter zeigt die Biegesteifigkeitskombinationen aller Ecken im Parameterraum. Die Biegesteifigkeiten von Haut und Stringersteg sind auf die Hautfeldlänge bezogen. Gestrichelt dargestellt ist die daraus resultierende konvexe Hülle.

### 6.3. Sensitivitätsanalyse und Anpassung der Parametrisierung

Zur Identifikation unsensitiver Parameter können die Größen aus Tabelle 6.2 mit dem Korrelationsverfahren, dem Verfahren der Differenzenquotienten an einer Nominalstelle und der Methode nach Morris aus Abschnitt 4.3 untersucht werden. Zur Ermittlung der Stützpunkte wird das Basismodell verwendet, da es einen geringeren Aufwand besitzt und nach den Kriterien aus Unterabschnitt 4.9.2 mit einem Bestimmtheitsmaß von  $r^2 > 0.9$  dem Zielmodell ähnlich sein soll. Es werden ungefähr 1000 Stützpunkte des Basismodells für die Sensitivitätsanalyse ausgewählt. Für das Korrelationsverfahren werden 1000 Stützpunkte mit dem Basismodell ermittelt. Für die Methode der Differenzenquotienten an einer Nominalstelle ist jeder Parameter für sich in je 4 Bereiche unterteilt, was  $5 \cdot 13 = 65$  Stützpunkten entspricht. Die Methode nach Morris basiert auf  $71 \cdot 14 = 994$  Stützpunkten.

Da die Methode von Morris aufgrund ihrer Funktionsweise als die Aussagekräftigste angesehen wird, soll das Verfahren 10-fach wiederholt werden, um zusätzlich die Streuung ermitteln zu können. In Abbildung 6.2 sind verschiedene Varianten des Sensitivitätskoeffizienten aus Werten dieser Studie dargestellt. Die verschiedenen Varianten des Sensitivitätskoeffizienten unterscheiden sich zum einen durch die Verwendung des Sensitivitätskoeffizienten nach Morris  $\xi$  und der modifizierten Variante  $\xi^*$  aus Gleichung 4.29. Zum anderen unterscheiden sich

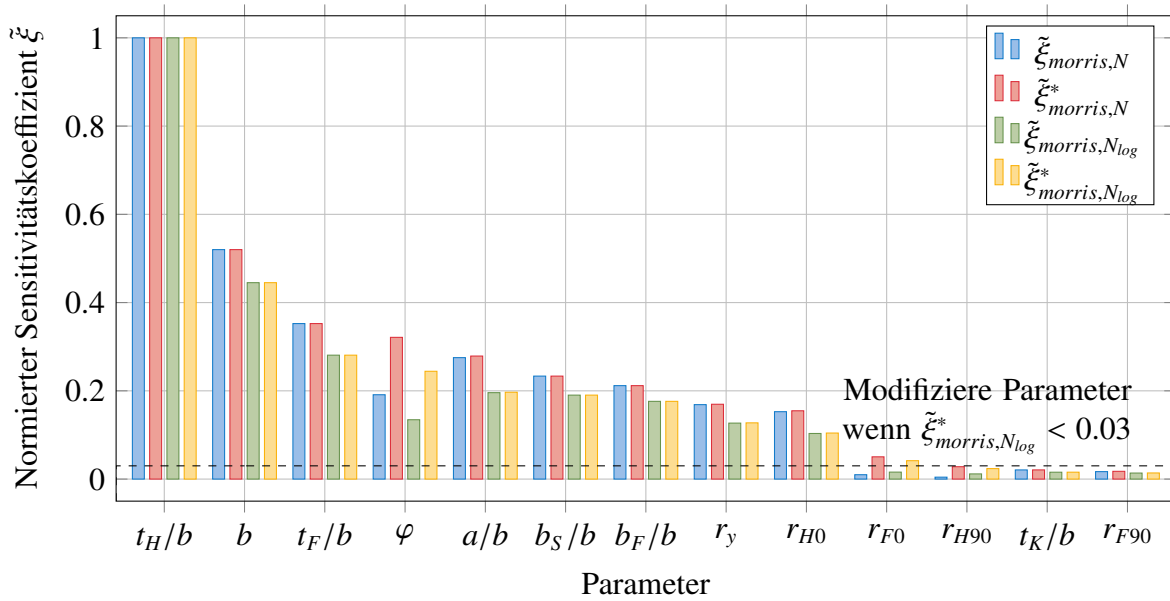


Abbildung 6.2.: Vergleich verschiedener Varianten des skalierten Sensitivitätskoeffizienten nach Morris und den Standardabweichungen aus 10 Iterationen.

die Varianten durch die direkte Verwendung der Beullasten  $N$  oder der transformierten Beullasten  $\log_{10}(N)$ . Die Parameter sind absteigend nach den Werten von  $\tilde{\xi}_{morris,\log_{10}(N)}^*$  sortiert.

Alle Verfahren bewerten das Hautdickenverhältnis  $t_H/b$  am sensitivsten, die Parameter von  $b$  bis  $r_{H0}$  befinden sich im mittleren Bereich und die letzten vier Parameter werden als wenig sensitiv bewertet. Durch die Verwendung des modifizierten Sensitivitätskoeffizienten  $\xi^*$  wird eine höhere Sensitivität der Parameter mit sowohl positiven als auch negativen Differenzenquotienten beobachtet. Dies ist für die Parameter  $\varphi$ ,  $r_{F0}$  und  $r_{H90}$  zu erkennen. Eine Verwendung der Sensitivitätskoeffizienten  $\xi_{morris}$  anstelle  $\xi_{morris}^*$  ändert somit die Reihenfolge der Parameter und könnte potentiell zu einer anderen Parameterselektion führen.

Die Betrachtung der Sensitivitäten aus dem Logarithmus der Beullast bewirken eine Bewertung der Differenzenquotienten auf Basis des Lastverhältnisses

$$\frac{\log_{10}(N_i) - \log_{10}(N_{i+\Delta})}{\Delta} = \frac{\log_{10}(N_i/N_{i+\Delta})}{\Delta} \quad (6.7)$$

anstelle der Differenz  $N_i - N_{i+\Delta}$  im nicht-logarithmischen Fall (vgl. Gleichung 4.27). Ein Vergleich von  $\tilde{\xi}_{morris,N}$  und  $\tilde{\xi}_{morris,N}^*$  mit  $\tilde{\xi}_{morris,\log_{10}(N)}$  und  $\tilde{\xi}_{morris,\log_{10}(N)}^*$  zeigt meist niedrigere Werte der logarithmischen Sensitivitätskoeffizienten. Daraus folgt, dass das Hautdickenverhältnis  $t_H/b$  im logarithmischen Fall als sensitiver im Vergleich zu den anderen Parametern bewertet wird. Die über die Fehlerklammern dargestellten Standardabweichungen zeigen kleinere

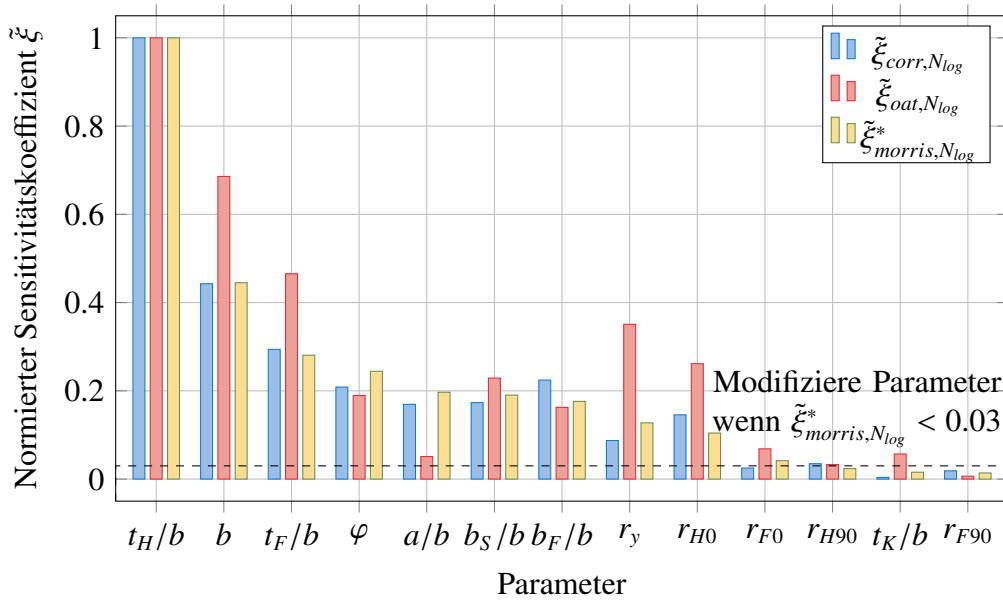


Abbildung 6.3.: Vergleich der skalierten Sensitivitätskoeffizienten sortiert nach der modifizierten Methode nach Morris.

Werte und somit kleinere Unsicherheiten für die logarithmischen Sensitivitäten.

Aus diesen Erkenntnissen werden die Sensitivitätskoeffizienten  $\tilde{\xi}_{morris, \log_{10}(N)}^*$  als Bewertungsmaß verwendet. Dieses wird in Abbildung 6.3 mit den Korrelationen und den Differenzenquotienten an der Nominalstelle verglichen. Hierbei zeigt sich, dass die Differenzenquotienten an der Nominalstelle sehr stark von den Ergebnissen der Methode nach Morris abweichen. Der  $e_{RMSE}$  zwischen  $\tilde{\xi}_{oat, \log_{10}(N)}$  und  $\tilde{\xi}_{morris, \log_{10}(N)}^*$  beträgt 0.12. Das zeigt, dass lokale Sensitivitätsbetrachtungen zu einer stark verfälschten Sensitivitätsklassifikation führen können. Die Korrelation liefert hingegen Sensitivitätswerte, deren Sensitivitätskoeffizienten deutlich näher an den Werten des Sensitivitätskoeffizienten nach Morris liegen. Der  $e_{RMSE}$  zwischen  $\tilde{\xi}_{corr, \log_{10}(N)}$  und  $\tilde{\xi}_{morris, \log_{10}(N)}^*$  ist mit 0.025 deutlich geringer.

Hier zeigt sich ein Vorteil der Betrachtung mehrerer Genauigkeitslevel. Durch die Verwendung des Basismodells für die Sensitivitätsanalyse kann eine globale Approximation der Sensitivität mit einer hohen Aussagesicherheit durchgeführt werden. Eine auf dem Zielmodell basierende Sensitivitätsanalyse liefert bei gleichem Simulationsaufwand stochastisch unsicherere Sensitivitäten. Andererseits muss berücksichtigt werden, ob das Basismodell bestimmte Parameter deutlich unterschiedlich bewertet als das Zielmodell. Diese Vor- und Nachteile gilt es abzuwägen.

Mit der Sensitivitätsanalyse steht eine Heuristik zur Verfügung, mit der das Problem der hohen Dimensionalität gemindert werden kann, indem nur wichtige Parameter im Metamodell

verwendet werden. Es kann nun ein Schwellenwert  $\eta_{sens}$  für die minimale akzeptierte Sensitivität eines Parameters definiert werden. Der Schwellenwert ist von verschiedenen Faktoren abhängig, wie z.B. von der Problemstellung, dem Parameterraum, der Zielgenauigkeit sowie den Parametersensitivitäten und ihren Unsicherheiten. Für Sensitivitäten  $\tilde{\xi}_{morris, \log_{10}(N)}^*$  sind die Unsicherheiten klein genug, um eine sichere Kategorisierung der Parameter in Parameter mit hoher ( $t_H/b$ ), mittlerer ( $b$  bis  $r_{H0}$ ) und niedriger Sensitivität ( $r_{F0}$  bis  $r_{F90}$ ) vorzunehmen, welche sich auf die Reihenfolge in Abbildung 6.2 bezieht. Die Parameter mit hoher und mittlerer Sensitivität werden für die folgenden Metamodelle verwendet. Von den Parametern mit niedriger Sensitivität weist  $r_{F0}$  mit  $\tilde{\xi}_{morris, \log_{10}(N), r_{F0}}^* \approx 0.042$  eine annähernd doppelte Sensitivität im Vergleich zum nächstniedrigeren Parameter  $r_{H90}$  mit  $\tilde{\xi}_{morris, \log_{10}(N), r_{H90}}^* \approx 0.023$  auf. Um weiterhin eine Variation der Lagenanteile im Stringer zu ermöglichen, wird  $r_{H90}$  ebenso zur Metamodellbildung herangezogen. Die weiteren wenig sensitiven Parameter gehen als Konstante mit ihren aus Tabelle 3.1 ermittelbaren Nominalwerten in das Basis- und Zielmodell ein. Somit wird der Schwellenwert zwischen  $r_{F0}$  und  $r_{H90}$  auf  $\eta_{sens} = 0.03$  festgelegt, wodurch die Parameter  $r_{H90}$ ,  $t_K/b$  und  $r_{F90}$  als Konstant betrachtet werden.

Es wird erwartet, dass mit dem Schwellenwert  $\eta_{sens} = 0.03$  die Zielgenauigkeit von 1% bis 4% aus Unterabschnitt 6.1.2 durch die Parameterreduktion nicht überschritten wird. Der Schwellenwert von  $\eta_{sens} = 0.03$  bezieht sich auf die Sensitivität des einflussreichsten Parameters. Bezogen auf die Gesamtsensitivität würde dieser Schwellenwert somit niedriger sein.

### 6.4. Versuchsplanung und Metamodellgenerierung

Zur Versuchsplanung gibt Tabelle 6.3 einen Überblick über die Größen der jeweiligen Stützpunktmengen, die mit dem CVT-Verfahren aus Unterabschnitt 4.2.5 erstellt werden.

Zur Untersuchung verschiedener Kombinationen der Stützpunktanzahl von Basis- und Zielmodell, werden verschieden große Stützpunktmengen für jedes Modell erzeugt. Weiterhin ermöglicht die Stützpunktmenge  $(X_{d=13}^{(b)}, Y_{d=13}^{(b)})$  über dem initialen Parameterraum aus Tabelle 6.2 mit  $d = 13$  eine Bewertung der Parameterreduktion auf den 10-dimensionalen Parameterraum.

Sowohl mit dem Basis- als auch Zielmodell werden jeweils 201 Teststellen ermittelt. Diese sind wie in Gleichung 5.23 um jeweils mindestens 5% vom Rand des Entwurfsraums entfernt. Die Teststellen mit 10 Parametern für das Basis- und Zielmodell sind dabei identisch.

$$X_{test}^{(b)} = X_{test}^{(z)} \quad (6.8)$$

	Typ	d	n	Stützstellen	Stützwerte	Krigingmodell
Stützpunkte	Basismodell	13	1001	$X_{d=13}^{(b)}$	$Y_{d=13}^{(b)}$	$\hat{N}_{d=13}^{(b)}$
	Basismodell	10	(51, 101, 201, 501, 1001, 2001, 3001)	$X_{n=i}^{(b)}$	$Y_{n=i}^{(b)}$	$\hat{N}_{n=i}^{(b)}$
	Zielmodell	10	(21, 51, 101, 151, 501)	$X_{n=i}^{(z)}$	$Y_{n=i}^{(z)}$	$\hat{N}_{n=i}^{(z)}$
Testpunkte	Basismodell	13	201	$X_{test,d=13}^{(b)}$	$Y_{test,d=13}^{(b)}$	
	Basismodell	10	201	$X_{test}^{(b)}$	$Y_{test}^{(b)}$	
	Zielmodell	10	201	$X_{test}^{(z)}$	$Y_{test}^{(z)}$	

Tabelle 6.3.: Übersicht über Versuchspläne des Basis- und Zielmodells mit der Parameteranzahl  $d$  und der Stützpunktanzahl  $n$

## 6.5. Bewertung der Metamodelle

### 6.5.1. Basismetamodell

Für die in Tabelle 6.3 genannten Basismetamodelle, listet Tabelle 6.4 den  $e_{RMSRE}$  und  $e_{MRE}$  der Basismetamodelle mit 13 Parametern  $\hat{N}_{d=13}^{(b)}$  bzw. 10 Parametern  $\hat{N}_{d=10}^{(b)}$  auf. In den ersten beiden Zeilen werden beide Krigingmodelle mit Testpunkten aus dem 13-dimensionalen Parameterraum und in Zeile drei und vier mit Testpunkten aus dem 10-dimensionalen Parameterraum verglichen. Für den Fall unterschiedlicher Dimensionalität werden die Nominalwerte der ausgelassenen Parameter verwendet. Der 10-dimensionale Parameterraum ist somit eine Spezialisierung für das Krigingmodell  $\hat{N}_{d=13}^{(b)}$ . Andererseits gehen von den Testwerten des 13-dimensionalen Parameterraums nur je 10 Parameter als Variablen in das Modell  $\hat{N}_{d=10}^{(b)}$  ein. Damit wird die Variation der drei entfernten Parameter in  $\hat{N}_{d=10}^{(b)}$  nicht berücksichtigt.

Beide Modelle haben ihre geringsten Fehlerwerte im Vergleich mit den Testpunkten im gleichgroßen Parameterraum.

Eine Betrachtung des Krigingmodells  $\hat{N}_{d=10}^{(b)}$  zeigt, dass der  $e_{RMSRE}$  um 0.006 und der  $e_{MRE}$  um 0.003 ansteigt, wenn die Testpunkte des Parameterraumes mit 13 Parametern verwendet und somit die in  $\hat{N}_{d=10}^{(b)}$  ausgelassenen Parameter variiert werden. Damit ist der Fehler basierend auf dem  $e_{MRE}$  ungefähr 0.003, wenn man die entfernten, wenig sensitiven Parameter in der Metamodellbildung auslässt, aber weiter variiert. Die Fehlerwerte des Krigingmodells  $\hat{N}_{d=10}^{(b)}$  sind verglichen mit den Testpunkten der beiden Parameterräume sehr ähnlich.

## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

Fehlermetrik	Vergleichswerte	$\hat{N}_{d=13}^{(b)}$	$\hat{N}_{d=10}^{(b)}$
$e_{RMSRE}$	$Y_{test,d=13}^{(b)}$	0.031	0.035
$e_{MRE}$	$Y_{test,d=13}^{(b)}$	0.024	0.025
$e_{RMSRE}$	$Y_{test,d=10}^{(b)}$	0.033	0.029
$e_{MRE}$	$Y_{test,d=10}^{(b)}$	0.025	0.022
$e_{RMSRE}$	$\hat{Y}_{X/\{x_i\}}^{(b)}$	0.046	0.043
$e_{MRE}$	$\hat{Y}_{X/\{x_i\}}^{(b)}$	0.032	0.03

Tabelle 6.4.: Modellfehler der Metamodelle  $\hat{N}^{(b)}$  mit 13 bzw. 10 Parametern im Vergleich zu den 10- und 13-dimensionalen Testpunkten  $Y_{test}^{(b)}$  des Basismodells sowie den Kreuzvalidierungswerten  $\hat{Y}_{X/\{x_i\}}^{(b)}$ .

Aufgrund des kleineren Parameterraumes weist das Krigingmodell mit 10 Parametern mit  $e_{MRE} = 0.022$  einen etwas geringeren Fehler auf als das Krigingmodell mit 13 Parametern mit einem Fehler von  $e_{MRE} = 0.024$ .

Der Vergleich der Fehlerwerte der vorgestellten Basismetamodelle  $\hat{N}_{d=13}^{(b)}$ ,  $\hat{N}_{d=10}^{(b)}$  kann einen quantitativen Indikator liefern, ob die Parameterreduktion sinnvoll ist. Aufgrund der sehr kleinen Fehlerunterschiede kann keine eindeutige Entscheidung getroffen werden. Zur Erstellung der folgenden Zielmodellstützpunkte wird der kleinere Parameterraum verwendet, da dieser das einfachere Modell beinhaltet und somit auch eine geringere Ausführungsdauer sowohl in der Metamodellerstellungs- als auch in der Metamodellanwendungsphase aufweist. Bei dieser Entscheidung ist zu beachten, dass die Fehlerwerte durch die nicht deterministischen Verfahren im Prozess zur Metamodellerstellung einer stochastischen Verteilung unterliegen. Für eine stochastische Absicherung dieser Entscheidung müssten jeweils mehrere Metamodelle mit unterschiedlichen Anzahlen von Stützpunkten erzeugt und bewertet werden. Das wird in dieser Arbeit aufgrund des hohen Aufwands nicht durchgeführt.

Abbildung 6.4 veranschaulicht die Abhängigkeit des Fehlers von der Anzahl der Basismodellstützpunkte. Mit steigender Stützpunktanzahl ist eine stete Reduktion des Modellfehlers zu beobachten. Das genaueste Modell erreicht  $e_{MRE} = 0.018$ .

Hiermit zeigt sich, dass das Basismetamodell den Bereich der Genauigkeitszielstellung aus Unterabschnitt 6.1.2 erreicht. Jedoch wird die Zielgenauigkeit nicht mit den vorgestellten Metamodellen unterschritten.

Die kreuzvalidierungsbasierten Fehlerwerte aus Tabelle 6.4 in Zeile 5 und 6 weisen leicht höhere Werte als die testpunkt-basierten Fehlerwerte auf, was im vorherigen Anwendungsfall ebenso überwiegend beobachtet wurde. Da für diesen Anwendungsfall Testwerte als Vergleichsba-

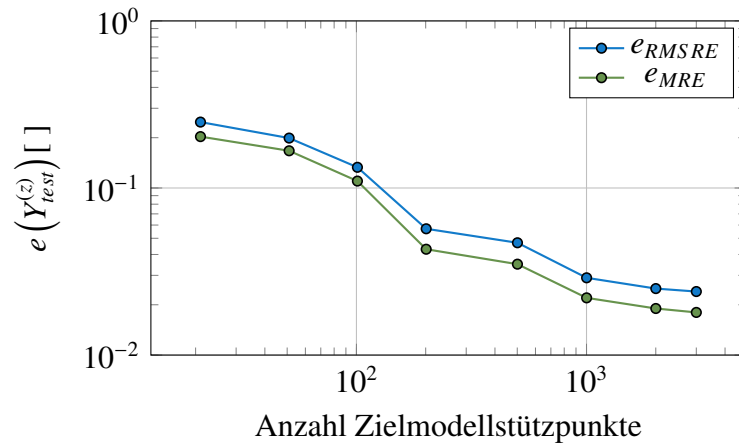


Abbildung 6.4.: Entwicklung des Modellfehler der Basismodelle mit  $n^{(b)} = (51, 101, 201, 501, 1001, 2001, 3001)$

Kriging- modell- typ	Fehler- metrik	$N_{d=10,n=1001}^{(b)}$	$\hat{N}_{d=10,n=1001}^{(b)}$	$\hat{N}_{n=21}$	$\hat{N}_{n=51}$	$\hat{N}_{n=101}$	$\hat{N}_{n=151}$	$\hat{N}_{n=501}$
Basis	$e_{RMSRE}$	0.96	0.1					
Basis	$e_{MRE}$	0.074	0.078					
Ziel	$e_{RMSRE}$			0.25	0.172	0.115	0.075	0.036
Ziel	$e_{MRE}$			0.211	0.168	0.089	0.06	0.028
hier. K.	$e_{RMSRE}$			0.081	0.079	0.065	0.05	0.036
hier. K.	$e_{MRE}$			0.063	0.063	0.055	0.039	0.029

Tabelle 6.5.: Gütewerte der Krigingmodelle  $\hat{N}_{n=1001}^{(b)}$ ,  $\hat{N}^{(z)}$  und  $\hat{N}^{(zb)}$  im Abhängigkeit von den Testpunkten des Zielmodells  $Y_{test}^{(z)}$ .

sis vorliegen, wird im Folgenden auf die Kreuzvalidierung verzichtet.

### 6.5.2. Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell

In Tabelle 6.5 sind die Fehlerwerte des Basismodells, Basismetamodells, Zielmetamodells und Multilevel-Metamodells im Vergleich zu den Testpunkten des Zielmodells dargestellt. Zusätzlich sind diese in Abbildung 6.5 visualisiert.

Das Basismodell und Basismetamodell bilden die Zielmodellstützpunkte jeweils mit sehr ähnlichen Fehlerwerten von  $e_{RMSRE} = 0.096$  und  $e_{RMSRE} = 0.1$ , sowie  $e_{MRE} = 0.074$  und  $e_{MRE} = 0.078$  ab.

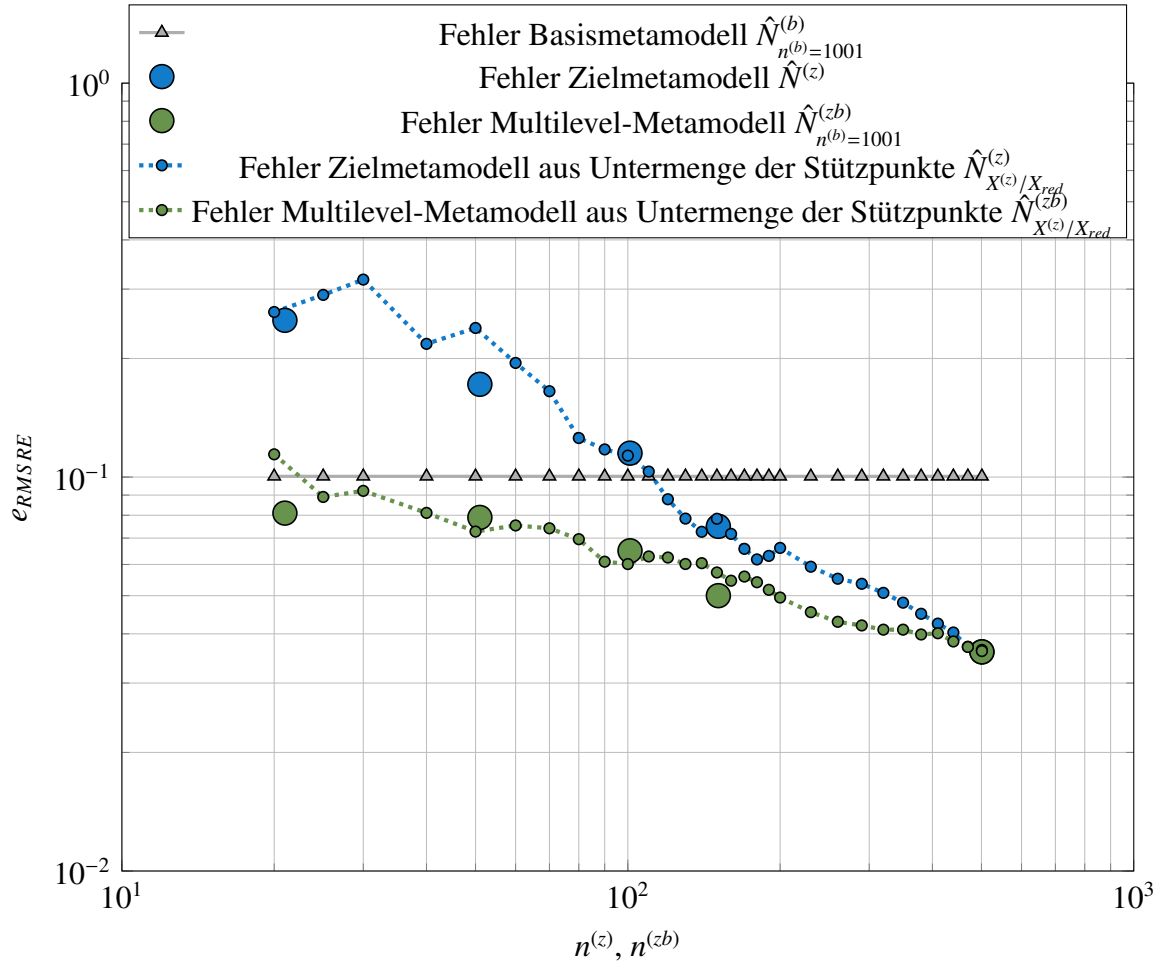


Abbildung 6.5.: Abhängigkeit der Modellfehler des Basis-, Ziel- und Multilevel-Metamodells ( $\hat{N}_{n=1001}^{(b)}, \hat{N}^{(z)}, \hat{N}^{(zb)}$ ) von der Anzahl der Zielmodellstützpunkte. Zusätzlich sind die Metamodelle  $\hat{N}_{X^{(z)}/X_{red}}^{(z)}$  und  $\hat{N}_{X^{(z)}/X_{red}}^{(zb)}$  angegeben, die jeweils aus einer Untermenge der Stützpunkte  $(X_{n=501}^{(z)}, Y_{n=501}^{(z)})$  erzeugt werden.



Die Fehlerwerte der Zielmetamodelle zeigen deutliche Modellverbesserungen mit steigender Stützpunktzahl. Jedoch weisen die Metamodelle aus den Stützpunktmengen mit 21, 51 und 101 Stützpunkten höhere Fehler als das Basismodell und Basismetamodell auf. Somit wird für ein einfaches Krigingmodell eine große Anzahl an Stützpunkten benötigt, um Fehlerwerte zu erhalten, die die Fehlerwerte der Basismodelle unterschreiten. Mit dem aufwändigsten Zielmetamodell mit 501 Stützpunkten wird die Zielgenauigkeit mit  $e_{MRE} = 0.028$  erreicht.

Das Multilevel-Metamodell weist bereits mit der geringsten untersuchten Stützpunktzahl von  $n^{(z)} = 21$  um 16% bessere Fehlerwerte als das Basismodell auf. Mit steigender Stützpunktzahl verringern sich die Fehlerwerte der Multilevel-Metamodelle. Das aufwändigste Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell haben sehr ähnliche Fehlerwerte. Weiterhin sind in Abbildung 6.5 mit  $\hat{N}_{X^{(z)}/X_{red}}^{(z)}$  und  $\hat{N}_{X^{(z)}/X_{red}}^{(zb)}$  Metamodelle dargestellt, deren Stützpunkte aus einer Untermenge von  $(X_{n=501}^{(z)}, Y_{n=501}^{(z)})$  bestehen. Der Trend der Fehlerwerte dieser Metamodelle in Abhängigkeit von  $n^{(z)}$  ist ähnlich zu den Fehlerwerten der Metamodelle, die mit großen Punkten dargestellt sind. Für kleine  $n^{(z)}$  ist der Fehlerunterschied zwischen Zielmetamodell und hierarchischem Metamodell am größten, während der Unterschied mit steigenden  $n^{(z)}$  kleiner wird und für  $n^{(z)} = 501$  verschwindet. Der Bereich der Zielgenauigkeit von 1% bis 4% wird ab dem Metamodell mit 151 Stützpunkten erreicht, aber auch nicht unterschritten. Der Vergleich der Fehlerwerte zwischen Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell bestätigt Hypothese 1 für den großen Teil des in Abbildung 6.5 dargestellten Stützpunktbereiches.

Abbildung 6.6 veranschaulicht die Fehlerwerte der Multilevel-Metamodelle in Kombination aller Stützpunktmengen des Basis- und Zielmodells mit 10 Parametern. In den meisten Fällen tritt sowohl mit steigendem  $n^{(b)}$  als auch steigendem  $n^{(z)}$  eine Fehlerreduktion auf. Da die Fehlerwerte Ausprägungen einer stochastischen Verteilung sind, ist gut am Überkreuzen der Kurven zu erkennen. Es zeigt sich, dass Basismetamodelle mit hoher Stützpunktzahl auch bei 501 Zielmodellstützpunkten eine leichte Verbesserung des Multilevel-Metamodells bewirken.

Ursachen für die allgemeine Höhe der Fehlerwerte sind neben der allgemeinen Komplexität des Basis- und Zielmodells beispielsweise unstetige Gradienten im Bereich des Übergangs der Stabilitätsmodi, sowie die in Unterabschnitt 3.4.5 auf Seite 36 und Unterabschnitt 3.5.5 auf Seite 41 identifizierten Unstetigkeiten der Eigenwertlösung sein.

Zur Untersuchung von Hypothese 3 wird als Schätzer des Modellfehlers zwischen Basis- und Zielmodell ein relativer Fehler analog zum  $e_{MRE}$  vorgeschlagen. Dieser Modellfehler kann sowohl für das Basis- und Zielmodell  $e_{Modell}(x)$  als auch das Basis- und Zielmetamodell  $\hat{e}_{Modell}(x)$  mit

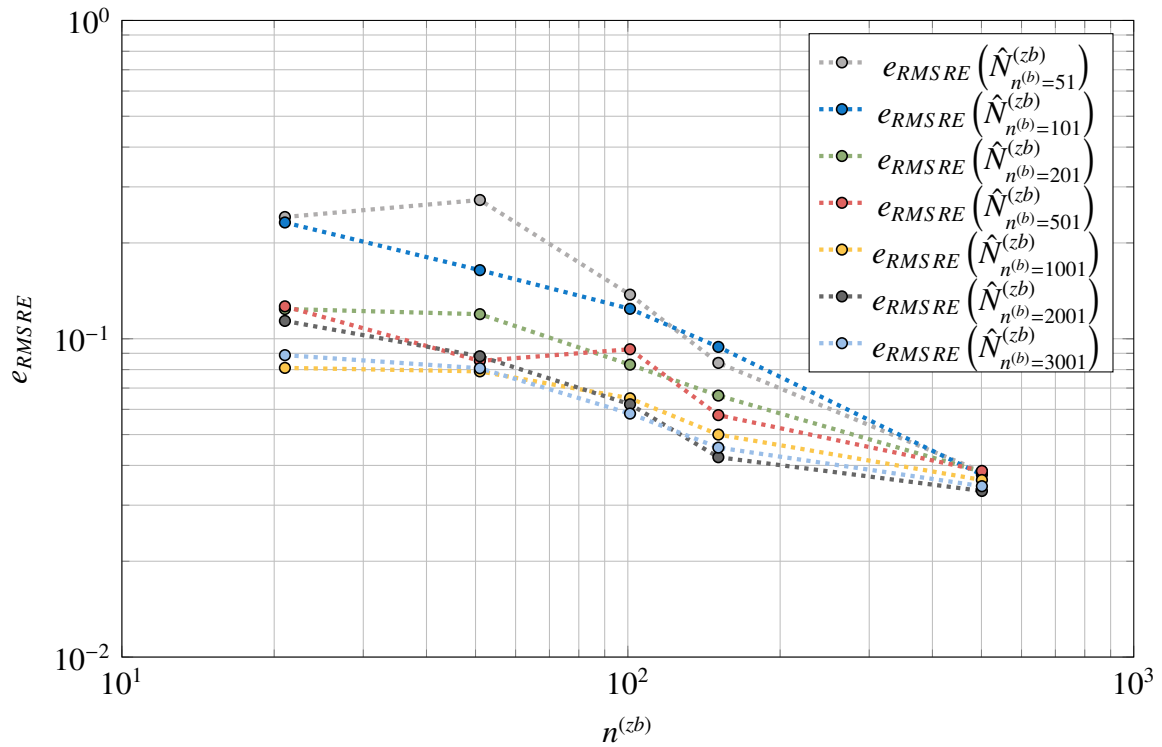


Abbildung 6.6.: Modellfehler des Multilevel-Metamodells in Abhängigkeit der Anzahl der Basis- und Zielmodellstützpunkte

## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

	$\hat{N}_{n=21}^{(zb)}$	$\hat{N}_{n=51}^{(zb)}$	$\hat{N}_{n=101}^{(zb)}$	$\hat{N}_{n=151}^{(zb)}$	$\hat{N}_{n=501}^{(zb)}$
$Cor(e_{Modell}(X_{test}^{(z)}), \hat{e}_{Modell}(X_{test}^{(z)}))$	0.45	0.45	0.64	0.81	0.89

Tabelle 6.6.: Korrelation der Modellfehlerwerte  $e_{Modell}(X_{test}^{(z)})$  und der geschätzten Modellfehlerwerte  $\hat{e}_{Modell}(X_{test}^{(z)})$  an den Zielmodellstützstellen.

$$e_{Modell}(x) = 1 - \frac{\min(N^{(b)}(x), N^{(zb)}(x))}{\max(N^{(b)}(x), N^{(z)}(x))} \quad (6.9)$$

$$\hat{e}_{Modell}(x) = 1 - \frac{\min(\hat{N}^{(b)}(x), \hat{N}^{(zb)}(x))}{\max(\hat{N}^{(b)}(x), \hat{N}^{(zb)}(x))} \quad (6.10)$$

ermittelt werden. In Gleichung 6.10 wird das Multilevel-Metamodell verwendet, da es geringere Fehlerwerte als das Zielmetamodell aufweist. Nachteilig ist jedoch, dass es mit dem Basismodell erzeugt wird und somit einen systematischen Fehler enthält. In Tabelle 6.6 sind die Korrelationen der Modellfehlerwerte  $e_{Modell}(X_{test}^{(z)})$  und der geschätzten Modellfehlerwerte  $\hat{e}_{Modell}(X_{test}^{(z)})$  an den Zielmodellstützstellen dargestellt. Mit steigender Stützpunktzahl der Metamodelle steigt die Korrelation zwischen Modellfehler und Modellfehlerschätzer. Die Multilevel-Metamodelle mit 151 und 501 Stützpunkten liefern hohe Korrelationen, sind damit am besten als Schätzer des Modellfehlers geeignet und bestätigen Hypothese 3.

Mit diesem Schätzer des Modellfehlers können für das Basismodell stark fehlerbehaftete Bereiche im Parameterraum identifiziert werden, wodurch auf Anwendungsgrenzen des Basismodells geschlossen werden kann. Hierdurch ist eine schnelle Bewertung und Analyse verschiedener Basismodelle möglich, was die Modellentwicklung und Entscheidungen zur Modellverwendung unterstützt.

Die adaptive Stützpunkterweiterung aus Abschnitt 4.8 wurde auf Basis des Multilevel-Metamodells  $\hat{N}_{n=21}^{(zb)}$  untersucht. Ein Hinzufügen von 80 Stützstellen liefert für diesen Anwendungsfall keine Modellverbesserung. Alle hinzugefügten Stützstellen liegen für fast jeden Parameter auf den Grenzen des Parameterraumes, weswegen keine raumfüllende Stützstellenverteilung erzeugt wird. Daher muss das MSE-Kriterium um Skalierungen erweitert werden, die das Zentrum des Parameterraums stärker gewichten als den Rand, was im Ausblick aufgegriffen wird.

### 6.5.3. Anwendungsbereich der Multilevel-Metamodelle

Im vorherigen Unterabschnitt wird der Nutzen des Multilevel-Metamodells  $\hat{N}^{(zb)}$  im Vergleich zum Zielmetamodell  $\hat{N}^{(z)}$  bezüglich der erreichten Modellgüte bei gleicher Anzahl an Zielmodellstützpunkten quantifiziert.

Darauf aufbauend soll im Folgenden zur Überprüfung der Hypothese 2 der numerische Aufwand berücksichtigt werden. Ziel ist es sowohl die Verbesserung der Modellgüte bei gleichem numerischen Aufwand als auch des reduzierten numerischen Aufwandes bei gleicher Modellgüte abzuschätzen. Dazu wird in Abhängigkeit der Stützpunktanzahlen einerseits eine Schätzung des numerischen Aufwandes und andererseits eine Schätzung des Metamodellfehlers erstellt.

#### Schätzung des numerischen Aufwandes

Für den Erstellungsaufwand soll eine Metrik abgeleitet werden, welche die Ausführungsdauer<sup>1</sup> des Prozesses zur Metamodellerstellung approximiert. Hiermit werden Parallelisierungskennwerte wie Anzahl paralleler Ausführungen und Kosten des Rechnersystems nicht in die Betrachtung des Erstellungsaufwandes integriert. Hauptsächlich ist der Aufwand zur Erstellung des Metamodells auf der einen Seite von der Dauer der Stützwerterzeugung und auf der anderen Seite von der Erstellung des Versuchsplans und des Krigingmodells abhängig. Diese sind in Tabelle 6.7 für die Basismetamodelle dargestellt. Die angegebenen Laufzeiten ergeben sich aus gemittelten Zeitauern mehrerer Programmläufe auf derselben Hardware<sup>2</sup>. Dabei ist der Aufwand der Stützwerterstellung linear von der Stützpunktanzahl abhängig, wohingegen die Versuchsplan- und Krigingmodellerstellung nach Tabelle 4.1 kubisch von der Stützpunktanzahl abhängt. Der Erstellungsaufwand eines Versuchsplanes und Krigingmodells wird daher mit

$$\hat{c}_{MM}(n) = 10^{-6} \cdot n^3 + 1.2 \cdot n \quad (6.11)$$

abgeschätzt.

Zwischen dem Basis- und dem Zielmodell unterscheiden sich die gemittelten Laufzeiten, was vor allem von dem Aufwand zur Erstellung des FEM-Modells und der Anzahl der Freiheitsgrade zum Lösen des Problems abhängt. Während im Basismodell 384 Knoten zur Strukturanalyse verwendet werden, bildet das Zielmodell 47591 Knoten ab, um das Referenzpaneel

<sup>1</sup>Kosten des zusätzlichen Bearbeitungsaufwands zur Erstellung von Multilevel-Metamodellen werden nicht berücksichtigt, da die Kostenstruktur und die Verfügbarkeit mehrerer parametrisierter Modelle stark organisationspezifisch ist.

<sup>2</sup>Hardware: Intel Xeon E5-2643, 3.3GHz mit 128GB RAM

## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

$n^{(b)}$	Aufwand Versuchsplan, Krigingparameter [s]	Aufwand Stütz- punkterstellung [s]	Gesamtauf- wand [s]
21	13	228	242
51	22	555	577
101	43	1100	1143
201	135	2190	2325
501	1218	5460	6678
1001	3623	10910	14533
2001	9000	21810	30810
3001	30660	32710	63370

Tabelle 6.7.: Laufzeiten zur Erstellung der Basismetamodelle

aus Tabelle 3.1 zu simulieren. Es werden Laufzeiten von 10.9s für das Basismodell und 590s für das Zielmodell ermittelt, was einem Laufzeitverhältnis von rund 1 : 54 entspricht.

Hieraus lassen sich die Schätzer für den Erstellungsaufwand des Zielmodells  $\hat{c}^{(z)}$  und des Multilevel-Metamodells  $\hat{c}^{(zb)}$  in [s]

$$\begin{aligned}\hat{c}^{(z)}(n^{(z)}) &= \hat{c}_{MM}(n^{(z)}) + 590 \cdot n^{(z)} \\ \hat{c}^{(zb)}(n^{(zb)}, n^{(b)}) &= \hat{c}_{MM}(n^{(zb)}) + 590 \cdot n^{(zb)} + \hat{c}_{MM}(n^{(b)}) + 10.9 \cdot n^{(b)}\end{aligned}\quad (6.12)$$

ableiten. Dabei ist  $n^{(z)}$  die Anzahl der Zielmodellstützpunkte des Zielmetamodells.  $n^{(zb)}$  und  $n^{(b)}$  sind die Stützpunktanzahlen des Multilevel-Metamodells.

### Schätzung des Metamodellfehlers

Ausgehend von den in Abbildung 6.5 und Abbildung 6.6 beschriebenen Fehlerwerten der Ziel- und Multilevel-Metamodelle mit ihren verschiedenen Stützpunktmengen, können für beide Metamodelltypen die Fehlerschätzer  $\hat{e}_{RMSRE}^{(z)}(n^{(z)})$  und  $\hat{e}_{RMSRE}^{(zb)}(n^{(zb)}, n^{(b)})$  in Abhängigkeit von der Stützpunktanzahl des Basis- und des Zielmodells abgeleitet werden. Diese werden ebenso als Krigingmodell erzeugt.  $\hat{e}_{RMSRE}^{(z)}$  interpoliert die 5 gegebenen Stützpunkte genau, wohingegen das Krigingmodell  $\hat{e}_{RMSRE}^{(zb)}$  eine Regularisierung (siehe Gleichung 4.59) von  $\lambda = 0.01$  aufweist, um eine Überanpassung (siehe Abbildung 4.6) an die stochastisch verteilten Fehler-

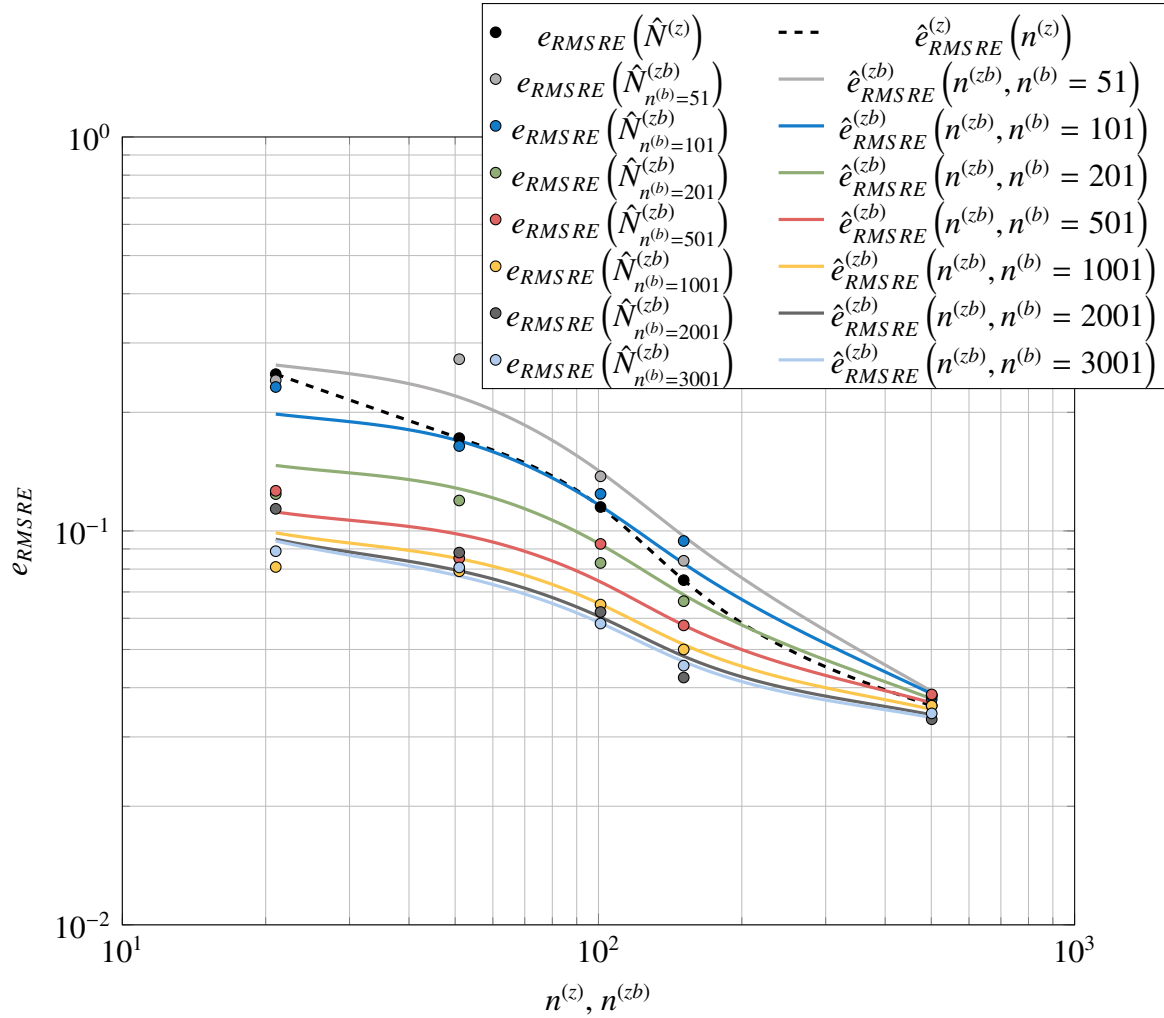


Abbildung 6.7.: Die Punkte sind ermittelte Modellfehler der Ziel- und Multilevel-Metamodelle in Abhängigkeit der Anzahl der jeweiligen Basis- und Zielmodellstützpunkte. Die Linien beschreiben die Fehlerschätzer der ermittelten Modellfehler der Zielmetamodelle (gestrichelt) und der Multilevel-Metamodelle (durchgezogene Linien).

werte zu verhindern. Die Fehlerschätzer sind in Abbildung 6.7 dargestellt.

### Anwendungsbereich des Multilevel-Metamodells

Mit Hilfe dieser Fehler- und Aufwandsschätzer lässt sich bewerten, für welche Kombinationen von Basis- und Zielmodellstützstellen die Verwendung von Multilevel-Metamodellen vorteilhaft ist. In Abbildung 6.8 a) ist das Verhältnis der Fehlerschätzer bei gleichem Erstellungsaufwand dargestellt. Damit kann der sinnvollen Anwendungsbereich von Multilevel-Metamodellen abgeschätzt werden, welcher durch  $1 - \hat{e}^{(zb)}/\hat{e}^{(z)} > 0$  gekennzeichnet ist. Für diesem Anwendungsbereich kann Hypothese 2 bestätigt werden. Es zeigt sich, dass die größten Metamodellverbesserungen im Bereich kleiner  $n^{(zb)}$  und  $n^{(b)} \approx 700$  von ungefähr 48% möglich sind. Mit steigendem  $n^{(zb)}$  wird das Potential der Multilevel-Metamodelle geringer, wobei  $n^{(b)}$  ebenfalls steigt, um den größten Vorteil gegenüber dem Zielmetamodell zu erreichen.

Im Bereich geringer  $n^{(b)}$  ist das Zielmetamodell vorteilhafter, da hier die Multilevel-Metamodelle keine geringeren Modellfehler aber einen höheren Erstellungsaufwand aufweisen. Im Bereich großer  $n^{(b)}$  bewirkt der hohe, kubische Erstellungsaufwand des Krigingschätzers eine obere Begrenzung des sinnvollen Anwendungsbereiches von Multilevel-Metamodellen.

Eine andere Betrachtungsperspektive liefert Abbildung 6.8 b). Hier werden für gleiche Metamodellfehler zwischen Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell die Verhältnisse des jeweiligen Erstellungsaufwandes dargestellt. Der sinnvolle Anwendungsbereich von Multilevel-Metamodellen ist durch  $1 - \hat{e}^{(zb)}/\hat{e}^{(z)} > 0$  gekennzeichnet und der gleiche Bereich wie in Abbildung 6.8 a). Jedoch verschieben sich die Maxima von  $1 - \hat{e}^{(zb)}/\hat{e}^{(z)} > 0$  in Abhängigkeit von  $n^{(zb)}$  in Richtung kleinerer  $n^{(b)}$ .

### Vergleich mit Literatur

Die von Toal [Toa15] aufgestellten Kriterien aus Unterabschnitt 4.9.3 können hier anhand des in Abbildung 6.8 bestimmten Anwendungsbereiches des Multilevel-Metamodells bewertet werden. Folgende Kriterien stellt Toal auf, die er als konservativ ansieht.

1.  $r^2 > 0.9$  zwischen Basis- und Zielmodell
2.  $0.1 < f_r < 0.8$  mit  $f_r = 1 - n^{(zb)}/n^{(z)}$  und  $\hat{e}^{(zb)} = \hat{e}^{(z)}$
3.  $n^{(b)} > n^{(zb)}$
4.  $f_r > 1.75/(1 + 1/c_r)$

Dabei ist  $c_r$  das Verhältnis zwischen Basismodellauswertung und Zielmodellauswertung und für diesen Anwendungsfall gilt  $c_r = 1/54$ .

## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

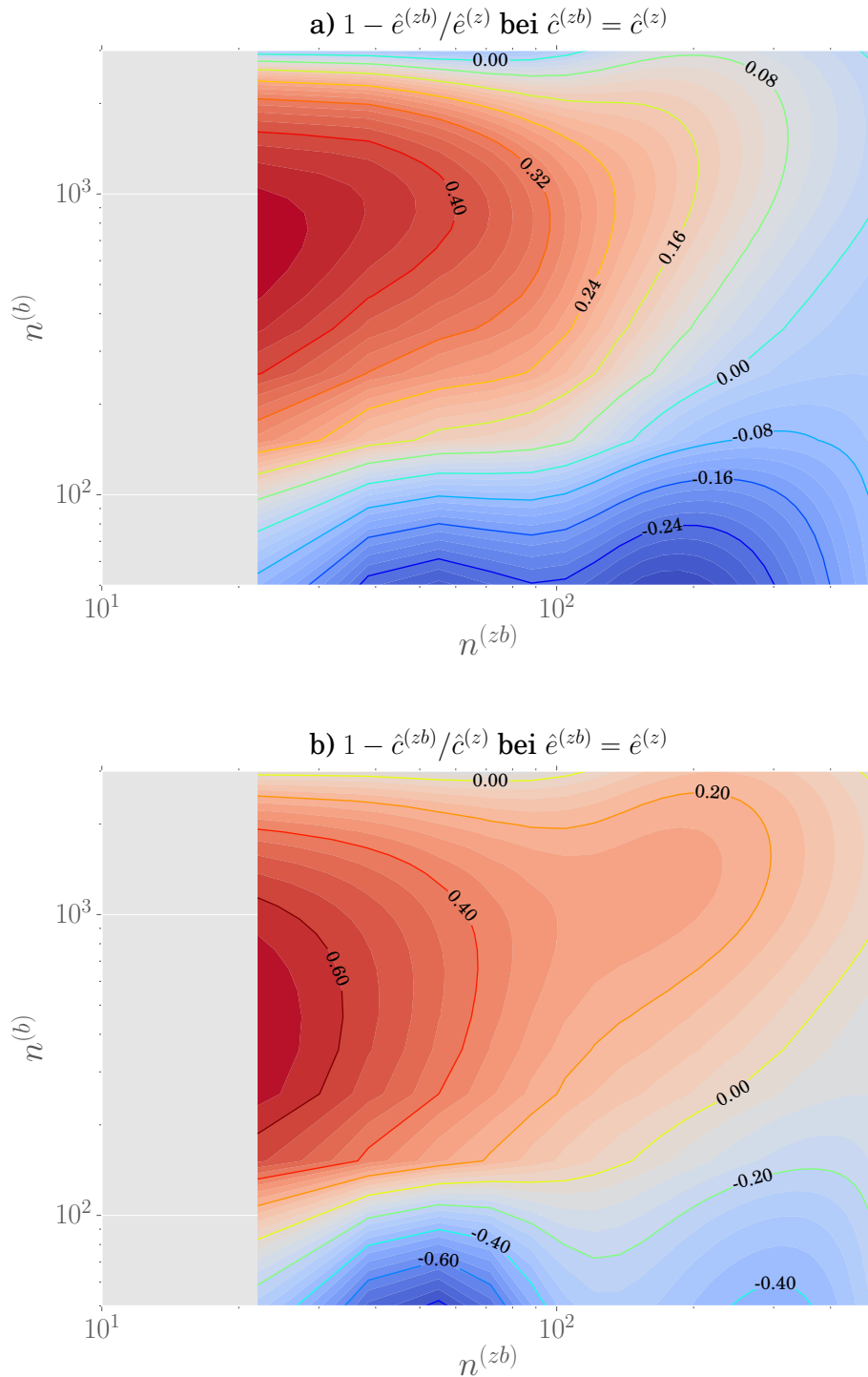


Abbildung 6.8.: Vergleich Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell; a) Abschätzung des Fehlerverhältnisses bei gleichem numerischen Aufwand; b) Abschätzung des Aufwandsverhältnisses bei gleichem Metamodellfehler (Die nötige Anzahl an Zielmetamodellstützstellen  $n^{(z)}$  wird so ermittelt, dass die jeweilige Gleichung erfüllt ist.)



## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

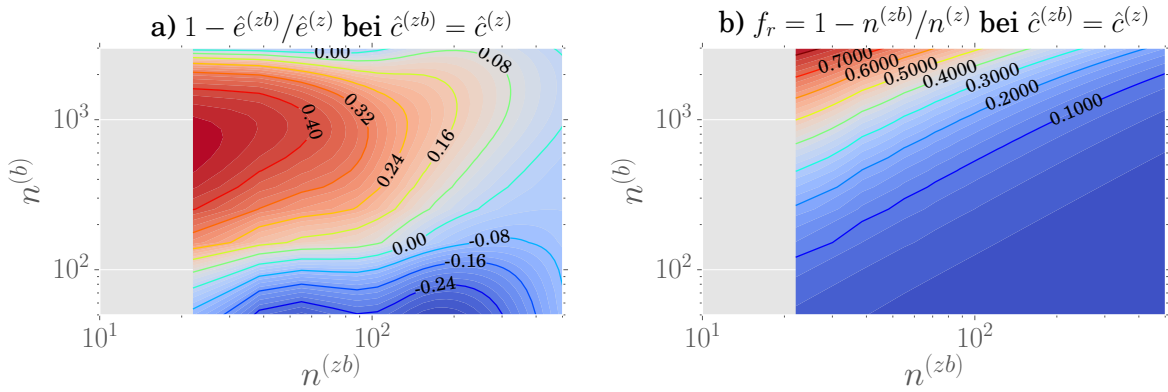


Abbildung 6.9.: Bewertung der Kriterien von Toal; a) Abschätzung des Fehlerverhältnisses bei gleichem numerischen Aufwand; b) Anteil der Zielmodellstützpunkte, die bei numerischen Aufwand in Basismodellstützpunkte umgewandelt werden

Das erste Kriterium wird für diesen Anwendungsfall mit  $r^2 = 0.984$  auf Basis eines Vergleichs der Basis- und Zielmodellwerte an den Teststellen  $X_{test}^{(z)}$  des Zielmodells erfüllt.

Das dritte Kriterium kann in Abbildung 6.8 a) betrachtet werden. Hier bestätigt sich, dass stets mehr Basis- als Zielmodellstützpunkte erzeugt werden müssen, damit das Multilevel-Metamodell geringere Fehlerwerte liefert.

Für die Kriterien zwei und vier kann aus Abbildung 6.9 a) das Fehlerverhältnis mit b)  $f_r$  verglichen werden. Das Kriterium  $0.1 < f_r < 0.8$  schließt einen großen Teil des Anwendungsbereiches für Multilevel-Metamodelle ein. Jedoch schließt es für große  $n^{(b)}$  bzw. große  $n^{(zb)}$  Regionen außerhalb des Anwendungsbereiches mit ein. Mit der hier verwendeten Anzahl an Stützpunkten ist eine Grenze der Verwendbarkeit dieser Kriterien erreicht. Toal verwendet für seine Untersuchungen maximal 50 Zielmodellstützpunkte, was hier deutlich überschritten wird. Weiterhin wird der Erstellungsaufwand des Metamodells  $\hat{c}_{MM}$  nicht berücksichtigt, was in dieser Auswertung eine Auswirkung auf den Anwendungsbereich des Multilevel-Metamodells hat.

Das vierte Kriterium wird wegen

$$f_r > \frac{1.75}{(1 + 1/c_r)} = 0.032 \quad (6.13)$$

bereits vom zweiten Kriterium abgedeckt. Der hier ermittelte Wert von  $c_r = 1/54$  ist unterhalb des minimalen Wertes von Toal mit  $c_r = 1/15$  und somit außerhalb des für die Kriterien untersuchten Bereiches.

Zusammenfassend sind die konservativen Kriterien von Toal für diesen Anwendungsfall nicht konservativ. Andererseits liegen in diesem Anwendungsfall mit der Stützpunktanzahl und  $c_r$

zwei Parameter außerhalb des von Toal untersuchten Bereiches. Eine Erweiterung der Heuristik für die Verwendung von Multilevel-Metamodellen könnte eine Abschätzung des optimalen Verhältnisses zwischen Basis- und Zielmodellstützpunkten sein. Damit kann vermieden werden Multilevel-Metamodelle zu erzeugen, die nur einen kleinen Vorteil gegenüber einfachen Metamodellen bieten.

## 6.6. Klassifikation der Stützstellen nach Stabilitätsmodus

### 6.6.1. Klassifikationsverfahren

Die bisher vorgestellten Metamodelle stellen eine Näherung der Funktion zur Beulanalyse dar. Dies schließt auch die „Knicke“ in der Beulfunktion ein, die durch Wechsel zwischen den Stabilitätsmodi auftreten. In jedem Bereich der Stabilitätsmodi können die Parameter unterschiedliche Sensitivitäten und teilweise gegenläufige Gradienten aufweisen. Ein Beispiel ist die Stringerhöhe. Im Bereich des Hautfeldbeulens vergrößert ein Anstieg der Stringerhöhe die Beullast. Im Bereich des lokalen Versteifungsbeulens wird die Beullast durch einen Anstieg der Stringerhöhe reduziert.

Daher soll untersucht werden, ob durch eine Klassifikation der Zielmodellstützpunkte nach Stabilitätsmodus, modifizierte Metamodelle verbesserte Fehlerwerte erzeugen. Als Modifikation wird das Metamodell auf Basis von Stützpunkten erzeugt, die ausschließlich auf Paneelkonfigurationen mit Hautfeldbeulen beruhen. Hierdurch könnte es möglich sein, die Modellkomplexität zu reduzieren.

Zur Klassifikation des Stabilitätsmodus werden die Verschiebungsvariationen der Beulform von definierten Knotenmengen untersucht. Diese werden für folgende Knotenmengen und Verschiebungsrichtungen ausgewertet:

**Hautfeldbeulen:** Verschiebungsvariationen in 1-Richtung aller Hautknoten  $\delta u_1^H$

**Lokales Versteifungsbeulen:** Verschiebungsvariationen in 2-Richtung aller oberen Stegknoten  $\delta u_2^{(So)}$

**Globales Beulen:** Verschiebungsvariationen in 1-Richtung aller unteren Stegknoten  $\delta u_1^{(Su)}$

Eine Veranschaulichung der oberen und unteren Stegknoten ist in Abbildung 6.10 gegeben. Von diesen Verschiebungsvektoren werden im nächsten Schritt die Maxima der jeweiligen absoluten Verschiebungsvariationen

Knotenmengen und deren Verschiebungen

- $\delta u_2^{So}$  für lokales Versteifungsbeulen
- $\delta u_1^{Su}$  für globales Beulen
- $\delta u_1^H$  für Hautfeldbeulen

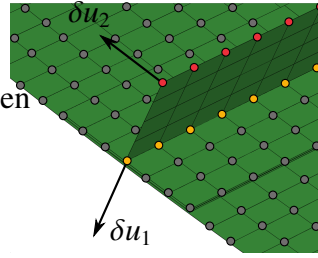


Abbildung 6.10.: Verwendete Knotenmengen zur Verschiebungsauswertung für lokales Versteifungsbeulen und globales Beulen

$$\begin{pmatrix} \delta u_{1,max}^H \\ \delta u_{2,max}^{(So)} \\ \delta u_{1,max}^{(Su)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(|\delta u_1^H|) \\ \max(|\delta u_2^{(So)}|) \\ \max(|\delta u_1^{(Su)}|) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

über diese drei Komponenten normiert

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{1,max}^H \\ \tilde{u}_{2,max}^{(So)} \\ \tilde{u}_{1,max}^{(Su)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta u_{1,max}^H + \delta u_{2,max}^{(So)} + \delta u_{1,max}^{(Su)}} \cdot \begin{pmatrix} \delta u_{1,max}^H \\ \delta u_{2,max}^{(So)} \\ \delta u_{1,max}^{(Su)} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

wodurch

$$\tilde{u}_{1,max}^H + \tilde{u}_{2,max}^{(So)} + \tilde{u}_{1,max}^{(Su)} = 1 \quad (6.16)$$

ist. Damit können diese drei Verschiebungsvariationen als additive Anteile eines Klassifikationskriteriums angesehen werden.

Der Zusammenhang zwischen den drei Werten des Klassifikationskriteriums ist für Paneelkonfigurationen unter axialer Last in Abbildung 6.11 dargestellt. Die Paneelkonfigurationen entstammen dem Parameterraum aus Tabelle 6.2 auf Seite 142, wohingegen der Lastrichtungswinkel mit  $\varphi = 0$  konstant ist. Mit dieser Darstellungsart wird der Stand des Wissens bezüglich der Klassifikation von Beulformen und der visuellen Aufbereitung erweitert.

Ist der Hautfeldbeulwert nahe 1, so verformt sich fast ausschließlich die Haut. Dies ist im rechten oberen Verformungsbild dargestellt. Gleiches tritt bei dem Wert für lokales Versteifungsbeulen auf, was im Verformungsbild links unten dargestellt ist. Globales Beulen hingegen kann maximal den Wert 0.5 erreichen, da die Haut unter der Versteifung die gleichen Ver-

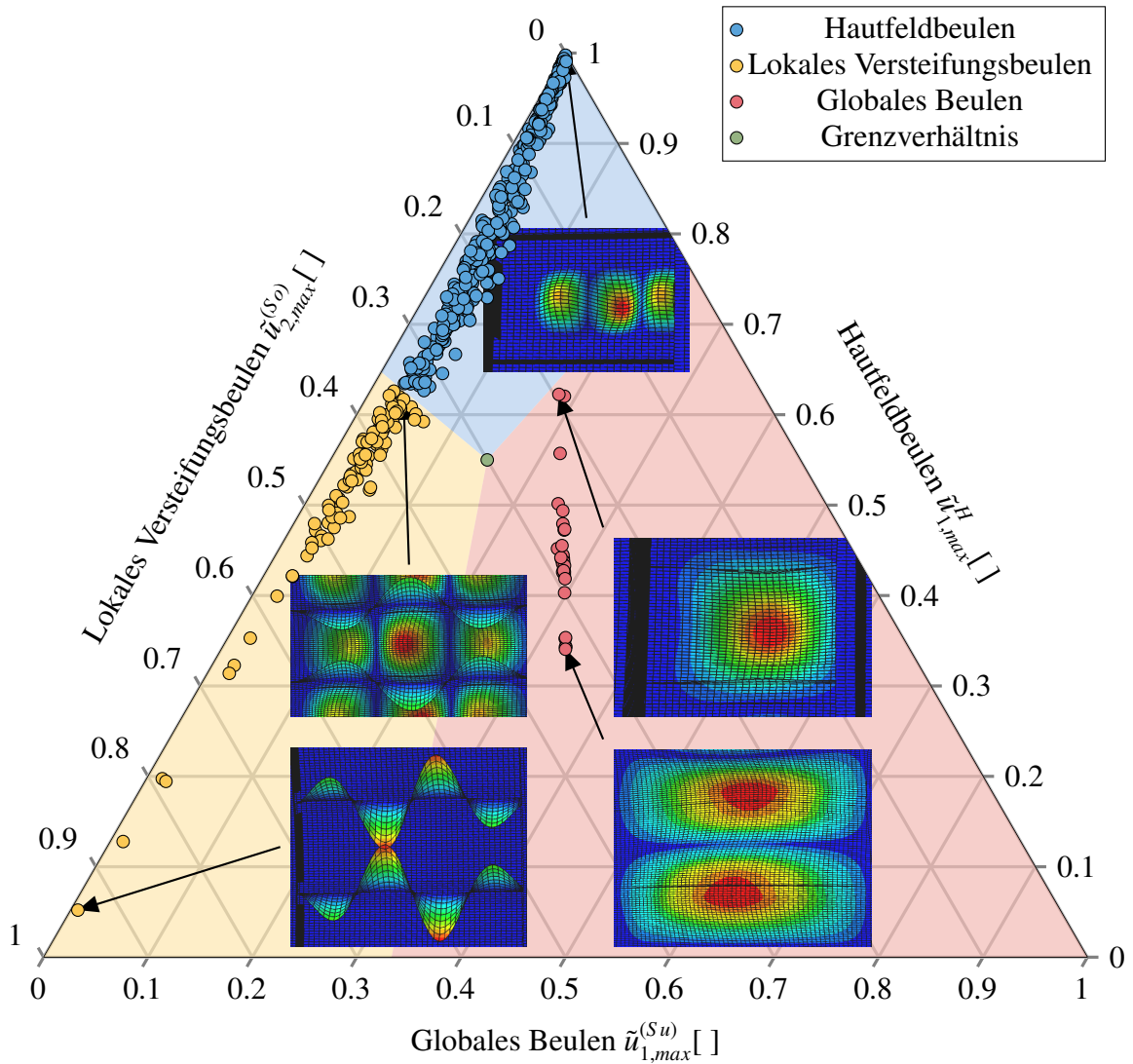


Abbildung 6.11.: Stabilitätsmodi verschiedener Paneelkonfigurationen unter reiner Druckbelastung. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Das Grenzverhältnis aus Gleichung 6.17 mit  $\tilde{u}_{1,max}^H = 0.55$ ,  $\tilde{u}_{2,max}^{(So)} = 0.3$ ,  $\tilde{u}_{1,max}^{(Su)} = 0.15$  definiert farbigen die Bereiche. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Die Achse für Hautfeldbeulen verläuft horizontal, für lokales Versteifungsbeulen von links oben nach rechts unten und für globales Beulen von links unten nach rechts oben.

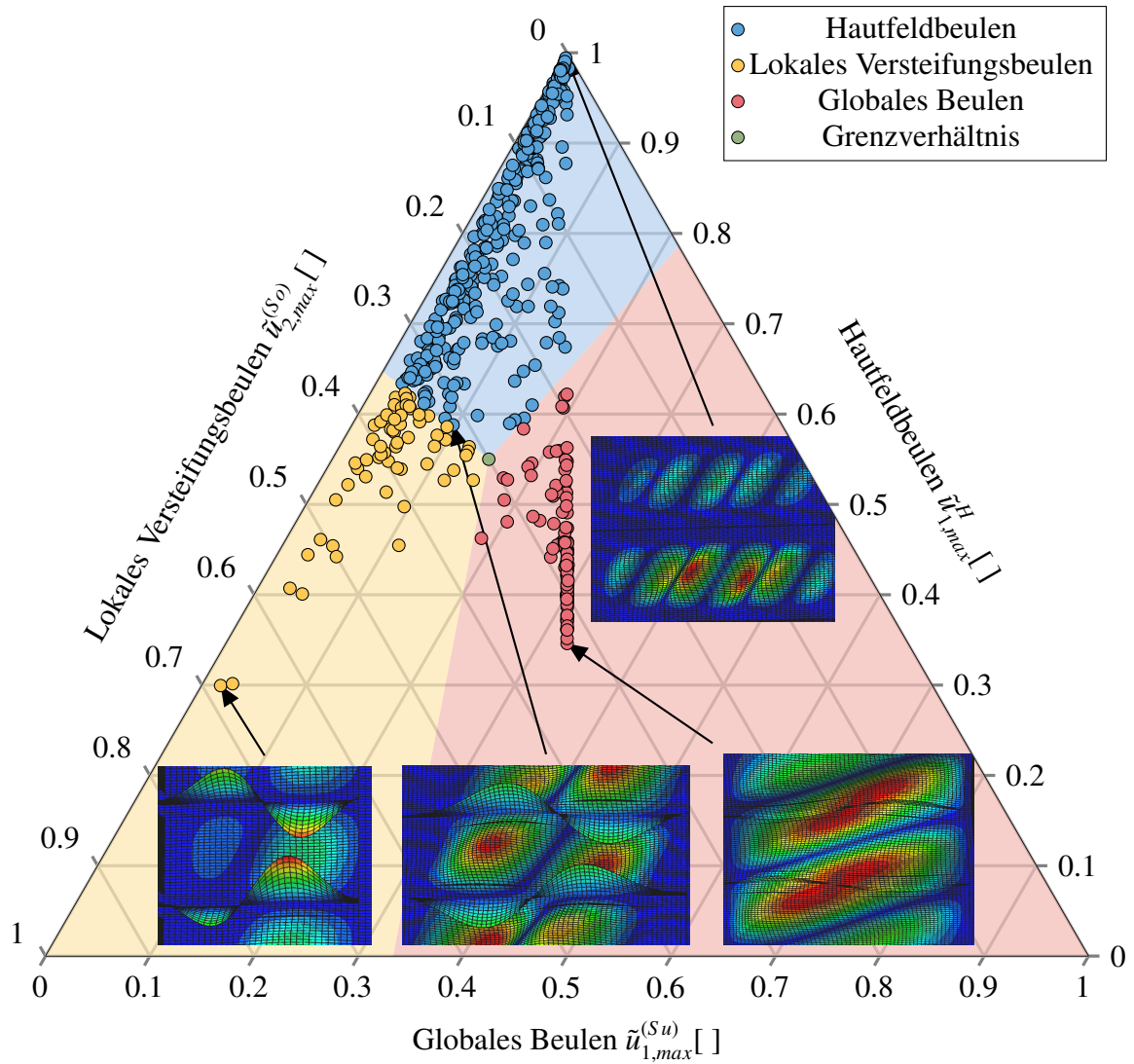


Abbildung 6.12.: Stabilitätsmodi verschiedener Panelkonfigurationen unter mehrachsiger Druck- und Schubbelastung. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Das Grenzverhältnis aus Gleichung 6.17 mit  $\tilde{u}_{1,max}^H = 0.55$ ,  $\tilde{u}_{2,max}^{(So)} = 0.3$ ,  $\tilde{u}_{1,max}^{(Su)} = 0.15$  definiert farbigen die Bereiche. Die Achsenwerte stellen normierte Maximalverschiebungen der jeweiligen Knotenmengen nach Gleichung 6.15 dar. Die Achse für Hautfeldbeulen ist horizontal, für lokales Versteifungsbeulen von links oben nach rechts unten und für globales Beulen von links unten nach rechts oben.

schiebungsvariationen erfährt; zusätzlich aber auch die Stringerstege seitliche Verschiebung aufweisen. Das Verformungsbild rechts unten zeigt ein leichtes Ausbeulen der Stringer bei einer hohen Deformation der Haut, wohingegen im Verformungsbild unten Mitte die Verschiebungsmaxima auf Stringerlinien liegen.

In Abbildung 6.11 sind zwei zusammengehörende Stützpunktmengen erkennbar. Die roten Punkte weisen anhand der Verformungsbilder globales Beulen auf. Die blauen und gelben Punkte stehen für Hautfeldbeulen, lokales Versteifungsbeulen oder eine Kombination von beidem. Damit kann globales Beulen für axiale Lasten von den andern beiden Stabilitätsmodi unterschieden werden. Die anderen beiden Stabilitätsmodi sind jedoch nicht klar voneinander trennbar, da sie kontinuierlich ineinander übergehen.

Abbildung 6.12 zeigt die Klassifikationswerte von Paneelkonfigurationen unter mehrachsiger Druck- und Schubbelastung. Im Vergleich zur vorherigen Abbildung existieren hier zusätzlich auch Punkte zwischen den beiden vorherigen Stützpunktmengen. Somit gehen für mehrachsige Lasten alle drei Stabilitätsmodi kontinuierlich ineinander über. An den Extrema sind die einzelnen Stabilitätsmodi gut zu erkennen, was durch die Darstellungen der Eigenformen links unten, rechts unten und rechts oben verdeutlicht wird. Die Eigenform unten in der Mitte zeigt wiederum den Übergangsbereich mit der Überlagerung von Hautfeld- und lokalem Versteifungsbeulen.

Aus diesen Erkenntnissen wird ein Klassifikationskriterium abgeleitet, indem ein Grenzverhältnis über

$$\begin{pmatrix} u_{1,Grenz}^H \\ u_{2,Grenz}^{(So)} \\ u_{1,Grenz}^{(Su)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.3 \\ 0.15 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

definiert wird. Lässt man einen Anteil der Grenze gegen Null gehen und das Verhältnis der jeweils anderen beiden Anteile gleich, so ergeben sich die Farbgrenzen, die in den beiden Abbildungen zu sehen sind. Damit kann Anhand des Bereichs einer Wertekombination die Klassifikation vorgenommen werden.

Für diese Klassifikation müssen zwei Schritte dieser Vorgehensweise kritisch betrachtet werden. Zum einen können die Auswahlkriterien der Grenze je nach Zielstellung unterschiedlich gesetzt werden, da es keinen klaren trennenden Bereich zwischen allen drei Kategorien gibt. Zum anderen sind der Stringerabstand und die Stringerhöhe nicht in diesem Kriterium berücksichtigt, obwohl sie einen großen Einfluss auf das Verhältnis Verschiebungsvariationen haben.

Kriging- modelltyp	Fehler- metrik	Vergleichs- werte	$\hat{N}_{H,n=14}$	$\hat{N}_{H,n=37}$	$\hat{N}_{H,n=70}$	$\hat{N}_{H,n=103}$	$\hat{N}_{n=357}$
Ziel	$e_{RMSRE}$	$Y_{test,H}^{(z)}$	0.269	0.187	0.153	0.082	0.035
hier. K.	$e_{RMSRE}$	$Y_{test,H}^{(z)}$	0.192	0.079	0.061	0.051	0.032

Tabelle 6.8.: Gütewerte der auf die Hautbeulmoden reduzierten Metamodelle  $\hat{N}_H^{(z)}$  und  $\hat{N}_H^{(zb)}$  im Vergleich zu den Testpunkten des Zielmodells.

Dies sollte in zukünftigen Erweiterungen berücksichtigt werden.

### 6.6.2. Zielmetamodell und Multilevel-Metamodell nach Selektion der Hautbeulmoden

Durch die im vorherigen Unterabschnitt beschriebene Klassifikation können die Versuchspläne aus Abschnitt 6.4 nach Stützpunkten selektiert werden, die als Hautfeldbeulen klassifiziert sind. Damit reduzieren sich die Stützpunktmengen aus Abschnitt 6.4 und die Metamodelle  $\hat{N}_{n=14,H}$ ,  $\hat{N}_{n=37,H}$ ,  $\hat{N}_{n=70,H}$ ,  $\hat{N}_{n=103,H}$  und  $\hat{N}_{n=357,H}$  können gebildet werden. In Tabelle 6.8 sind die resultierenden Fehlerwerte aufgelistet.

Im Vergleich zu den Krigingmodellen ohne Klassifikation der Stützpunkte aus Tabelle 6.5 zeigen sich nur für das Modell mit der maximal untersuchten Stützpunkanzahl leichte Verbesserungen. Die anderen Krigingmodelle liefern höhere Fehlerwerte. Daher bietet die Klassifikation für schub- und druckbelastete Paneele keinen Genauigkeitsvorteil.

### 6.6.3. Hautfeldbeulen unter axialer Belastung

Wie in Unterabschnitt 6.6.1 beschrieben, ist die Klassifikation unter reiner axialer Belastung besser, da globales Beulen besser klassifiziert werden kann (vgl. Abbildung 6.12 und Abbildung 6.11). Daher soll die Klassifikation für axial belastete Paneele untersucht werden, was mit weiteren den neu erstellten Stützpunkten  $(X_{n=101}^{(z)}, Y_{n=101}^{(z)})$  und den Testpunkten  $(X_{test}^{(z)}, Y_{test}^{(z)})$  durchgeführt wird.

Zur Untersuchung der Klassifikation des Hautfeldbeulens aus Unterabschnitt 6.6.1 wird der Lastrichtungswinkel  $\varphi = 0$  konstant gehalten. Die weitere Parametrisierung ist mit der aus den vorherigen Abschnitten identisch.

Hier zeigt sich durch die Selektion der Stützpunkte des Hautfeldbeulens eine Modellverbesserung, was in Tabelle 6.9 dargestellt ist. Sowohl das Zielmetamodell als auch das Multilevel-

## 6. Metamodellbildung für die lineare Stabilitätsanalyse

Kriging- modelltyp	Fehler- metrik	Vergleichs- werte	$\hat{N}_{x,n=101}$	$\hat{N}_{x,H,n=76}$
Ziel	$e_{RMSRE}$	$Y_{test,x}^{(z)}$	0.077	
hier. K.	$e_{RMSRE}$	$Y_{test,x}^{(z)}$	0.057	
Ziel	$e_{RMSRE}$	$Y_{test,x,H}^{(z)}$		0.058
hier. K.	$e_{RMSRE}$	$Y_{test,x,H}^{(z)}$		0.033

Tabelle 6.9.: Gütewerte der auf die Hautbeulmoden reduzierten Metamodelle  $\hat{N}_{x,H}^{(z)}$  und  $\hat{N}_{x,H}^{(zb)}$  im Vergleich zu den Testpunkten des Zielmodells.

Metamodell weisen nach der Selektion um 25% bzw. um 42% niedrigere Fehlerwerte auf als die Metamodelle ohne Stützpunktklassifikation.

Unter axialer Belastung ist es mit diesem Klassifikationsverfahren möglich, durch jede zueinander gehörende Stützpunktmenge je ein spezialisiertes Metamodell für den entsprechenden Stabilitätsmodus zu erzeugen. Darauf aufbauend sind Strategien zur Zusammenführung der damit erstellbaren Metamodelle nötig, welche im Ausblick diskutiert werden.

Insgesamt entspricht das Vorgehen zur Erstellung von drei Multilevel-Metamodellen und ihrer Zusammenführung einer Änderung des *Konzeptuellen Multilevel-Metamodell* aus Abbildung 2.3 auf Seite 12. Diese Änderung der „Metamodell-Konzeption“ entspricht somit der äußeren Iterationsschleife des Prozesses zur Metamodellerstellung aus Abbildung 2.1 auf Seite 8. Dieses Schaubild könnte somit um eine Stützstellenklassifikation und Metamodellzusammenführung für diesen Anwendungsfall erweitert werden.

### 6.7. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird anhand des Prozesses zur Metamodellerstellung aus Abbildung 2.1 durchlaufen, um Multilevel-Metamodelle mit einfachen Metamodellen basierend auf ihren Modellfehlerwerten und Erstellungskosten zu bewerten. Es konnte ein großer Bereich identifiziert werden, in dem Multilevel-Metamodelle gewinnbringend angewendet werden können. Diese Ergebnisse wurden zusätzlich mit einer Heuristik aus der Literatur verglichen und zeigen die Grenzen und Entwicklungsperspektiven der Heuristik auf.

Weiterhin wurde zur Vereinfachung der zu approximierenden Funktion eine Klassifikation eingeführt, mit der Stützpunkte anhand ihrer Eigenform nach Stabilitätsmodus selektiert werden können. Für axial belastete Paneele ermöglicht dies eine Modellverbesserung von 42%.



# 7. Perspektiven der Stabilitätsanalyse mit Multilevel-Metamodellen

## 7.1. Zusammenfassung

Ausgehend von der Motivation zur Ausnutzung genauer aber aufwändiger strukturmechanischer Analysemodelle im Flugzeugstrukturentwurf werden in dieser Arbeit Multilevel-Metamodelle betrachtet. Mit der Annahme hoher Kosten zur Erstellung von Stützpunkten des aufwändigen Analysemodells, wird ein Multilevel-Metamodell-Ansatz eingeführt. Hierbei wird ein kostengünstiges Analysemodell mit wenigen Auswertungen des aufwändigen Analysemodells kombiniert, um eine gleiche Modellgüte zu erreichen im Vergleich zu einem Einlevel-Metamodell basierend auf vielen Stützpunkten des aufwändigen Analysemodells. Dieses Einsparpotential wird für die Metamodellbildung strukturmechanischer Problemstellungen aufgezeigt und bewertet.

Zunächst wird ein Entwicklungsschema zur Erstellung und Absicherung von Multilevel-Metamodellen mit der Zusammenführung der nötigen Modellbestandteile abgeleitet. Hierbei werden Modellerstellungs- und Modellqualitätssicherungsprozesse berücksichtigt. Wesentliche Bestandteile dieses Schemas werden anhand von zwei Anwendungsfällen betrachtet und bewertet. Der erste Fall stellt die gerade Biegung eines Kragbalkens dar. Fall zwei betrachtet das Stabilitätsverhalten versteifter Schalen aus FVW unter mehrachsiger Schub- und Druckbelastung. Die untersuchten Strukturen, Lösungsansätze und Modelle sowie deren Stetigkeit werden vorgestellt und bewertet. Weiterhin werden Methoden zur Versuchsplanerstellung, Sensitivitätsanalyse, Metamodellbildung, Multilevel-Metamodellbildung, Metamodelladaption und Fehlerbewertung beschrieben und diskutiert. Dabei wird Kriging als Methode zur Metamodellbildung ausgewählt.

Im ersten Anwendungsfall werden die vorgestellten Methoden bezüglich Genauigkeit und Aussagefähigkeit bewertet. Hier zeigt sich, dass eine logarithmische Transformation der Zielgröße nötig ist, mit der die Metamodellgüte um eine Größenordnung verbessert werden kann. Als Ur-

sache wird der große Wertebereich in Kombination mit dem asymptotischen Verhalten des Modells identifiziert, was mit dem stationären stochastischen Prozess des Krigingmodells nicht in angemessener Güte abgebildet werden kann. Für diesen Anwendungsfall zeigt das Multilevel-Metamodell eine deutlich höhere Modellgüte als ein einfaches Metamodell bei gleicher Stützpunktanzahl des genaueren Ausgangsmodells. Weiterhin wird herausgearbeitet, dass der relative Fehler des Modells maßgebend ist, weswegen relative Bewertungsmetriken zur Bestimmung der Modellgüte verwendet werden sollten. Als ein weiteres Ergebnis wird „Centroidal Voronoi Tessellation“ (CVT) als bestes der vorgestellten Verfahren zur Versuchsplanung identifiziert. Die Quantifizierung basiert auf einer Metrik zur Verteilung der Stützpunkte sowie auf dem Fehlerwert der resultierenden Metamodelle.

Im Anwendungsfall zur Stabilitätsanalyse von mehrachsig belasteten Paneelen aus FVW wird ein deutlich größerer Parameterraum untersucht. Mit der Sensitivitätsanalyse gliedern sich die Parameter in drei Sensitivitätskategorien. In der Folge wird die Definition einer minimalen Sensitivität diskutiert und die drei unsensitivsten Parameter entfernt.

Der definierte Bereich der Zielgenauigkeit von 1% bis 4% kann für die untersuchten Metamodelle ab einer Anzahl von 151 Stützpunkten erreicht werden. Jedoch wird dieser Bereich der Zielgenauigkeit von keinem Metamodell unterschritten. Mögliche Ursachen für die Höhe der Modellfehler sind Unstetigkeiten der zu approximierenden Funktion durch das Verfahren der Eigenwertlösung und unstetige Gradienten durch den Wechsel der Stabilitätsmodi. Eine andere Ursache kann die Komplexität dieser Funktion sein, welche möglicherweise durch die in den zukünftigen Betrachtungen in Abschnitt 7.2 beschriebenen Maßnahmen reduziert werden können.

Die Verwendung von Multilevel-Metamodellen zeigt im Vergleich zu einfachen Metamodellen gleicher Stützpunktanzahl des genaueren Ausgangsmodells eine deutliche Modellverbesserung. Unter Berücksichtigung eines gleichen Simulationsaufwandes zeigt sich für viele Zielfehlerwerte ein Vorteil von Multilevel-Metamodellen. Hierfür werden Schätzer für vorteilhafte Parametervariationen von Multilevel-Metamodellen erstellt. Dies liefert die sinnvolle Anwendungsgrenze von Multilevel-Metamodellen gegenüber einfachen Metamodellen und schätzt zusätzlich optimale Verteilungen für die Verteilung des Simulationsbudgets zwischen einfachen und genaueren Modellstützpunkten.

Durch den im Kriging verwendeten stetigen Funktionsansatz können Unstetigkeiten wie „Knicke“ in der zu approximierenden Funktion nicht abgebildet werden. Daher wird eine Klassifikation und ein Darstellungsschema der Klassifikationsbereiche in Abhängigkeit der Beuleigenformen eingeführt, um die Stützpunkte nach ihrem Stabilitätsmodus zu unterscheiden. Hierdurch wird eine Modellvereinfachung erreicht, die den Metamodellfehler axial belasteter

Paneele im untersuchten Fall um 42% reduzieren kann. Für schub- und druckbelastete Paneele führt diese Klassifikation nicht zu einer Modellverbesserung und muss zukünftig untersucht werden.

Schlussendlich zeigt sich für diesen Anwendungsfall die kubische Abhängigkeit der Kriging-modellerstellung von der Stützstellenanzahl als Nachteil. Hierdurch werden zur Kringingmodellerstellung Grenzen bezüglich Laufzeit und Speicher erreicht, die bei anderen Verfahren wie Neuronale Netze nicht diese starke Limitierung aufweisen.

## 7.2. Zukünftige Betrachtungen

### 7.2.1. Lineare Stabilitätsanalyse

Die in Abschnitt 3.5.5 identifizierten Unstetigkeiten verschlechtern die Approximation und erhöhen die nötige Regularisierung des Krigingmodells. Eine Möglichkeit zur Reduktion der Unstetigkeiten ist eine verbesserte Schätzung der festen Vorlasten aus Gleichung 3.20. Die Vorlast kann beispielsweise durch zweifache Ausführung der linearen Stabilitätsanalyse erreicht werden, wenn hierbei die erste Ausführung als Schätzung der festen Vorlasten verwendet wird. Damit erhöhen sich die Analysekosten um mindestens das Doppelte.

Weiterhin sollte untersucht werden, mit welchen Methoden die Unstetigkeit des Gradienten der Beullast an Stellen wechselnder Stabilitätsmodi besser berücksichtigt werden kann. Diese Unstetigkeiten unterteilen den Entwurfsraum näherungsweise in die Stabilitätsmodi. Somit ist zu untersuchen, wie eine verbesserte Klassifikation erstellt werden kann und wie die Metamodellbildung modifiziert werden muss, um diese Unstetigkeit besser approximieren zu können. Das bisherige Verfahren aus Unterabschnitt 6.6.1 zeigt gut unterscheidbare Ausprägungen der Beulform für global beulende Strukturen unter Druckbelastung (siehe Abbildung 6.11). Mögliche Verbesserungen der Klassifikation können durch die Integration weiterer Entwurfsparameter in das Klassifikationskriterium erzielt werden. Hierfür eignen sich Stringerabstand und Steghöhe besonders. Dieses Vorgehen erlaubt das Erzeugen mehrerer Metamodelle, die an den Grenzen der Klassifikationsbereiche eine Gewichtung erhalten. Ein mögliches Verfahren hierfür ist das „Mixture of Experts“, was Friedmann [FHT01] beschreibt.

### 7.2.2. Stabilitätsanalyse im Nachbeulbereich

Betrachtet man anstelle der linearen Stabilitätsanalyse das Nachbeulverhalten von Paneelen mit geometrisch nichtlinearen FEM-Modellen, so sollte sich ein deutlicherer Aufwandsvorteil

ergeben. Hierfür müssen aus den Last-Verformungs-Informationen geeignete Auslegungskriterien abgeleitet werden. Die in Abbildung 7.1 dargestellten Untersuchungen zeigen große Unstetigkeiten durch Wechsel der Beuleigenformen im Nachbeulbereich.

Daher ist als erstes zu untersuchen, wie eine untere Schranke der Versagenslast aus den Daten nichtlinearer Analysen ermittelt werden kann, welche keine oder geringe Unstetigkeiten aufweist. Diese Methoden müssen robust im gesamten Parameterraum anwendbar sein.

### 7.2.3. Parametrisierung und Metamodellbildung

Um die Flexibilität des Modells zu erhöhen, kann die in Kapitel 6 vorgestellte Parametrisierung durch bisher vernachlässigte Eigenschaften erweitert werden. Zur Abbildung von Materialeigenschaften eignen sich Werte der Steifigkeitsmatrix. Zur Verbesserung der bestehenden Laminatparametrisierung aus Unterabschnitt 6.2.2 eignen sich prinzipiell „Lamination Parameters“ (siehe Tsai [TH81] und Diaconu [DS04]). Hierfür müssen effiziente Verfahren zur Versuchsplanerstellung und Stützpunkterweiterung gefunden werden, die die Stützstellen im dem restringierten Parameterraum der „Lamination Parameters“ erstellen können. Es muss untersucht werden, wie diese Verfahren eine gute Stützstellenverteilung gewährleisten.

Die Einführung von Beulfaktoren  $k$  kann die zu approximierende Funktion zur Stabilitätsanalyse vereinfachen. Solche Beulfaktoren bestehen aus einer Skalierung mit Steifigkeitskenngrößen, müssen aber für jeden Strukturabschnitt in Beziehung gesetzt werden. Hierbei muss untersucht werden, ob durch die relative Definition der Beulfaktoren eine modellvereinfachende Wirkung erzielt werden kann.

Eine adaptive Stützpunkterweiterung mit dem MSE-Kriterium erzeugt die meisten Stützstellen am Rand, wenn Parameterräume mit vielen Dimensionen verwendet werden. Daher sollte das MSE-Kriterium um geeignetere Strategien zur Stützpunkterweiterung ersetzt oder erweitert werden. Eine Möglichkeit kann der „sample sensitivity error“ von Rosenbaum [RS12] darstellen.

Die Kriterien von Toal [Toa15] liefern eine Heuristik, die den Bereich abgrenzen, in dem Multilevel-Metamodelle sinnvoll sind. Hier sollte eine erweiterte Heuristik gesucht werden, die den Erstellungsaufwand des Metamodells und größere Werte von  $c_r$  berücksichtigt. Zusätzlich ist neben dem für Multilevel-Metamodelle günstigen Bereich eine Heuristik des optimalen Verhältnisses zwischen Basis- und Zielmodellstützstellen interessant und sollte untersucht werden.

Das hier verwendete Prinzip einer Hierarchie von Analysemodellen impliziert, dass das Modell an der obersten Stelle der Hierarchie eine gewisse Wahrheit darstellt. Dieses Modell unter-

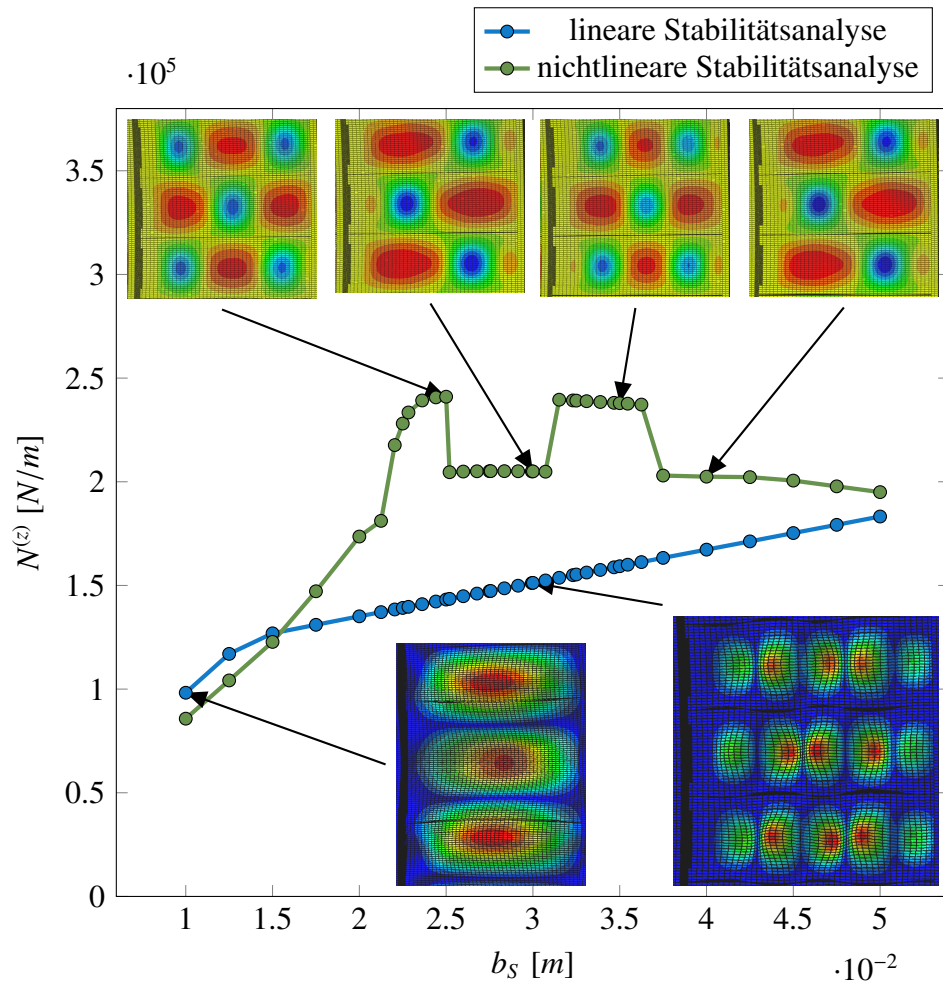


Abbildung 7.1.: Ermittelte kritische Lasten eines Panels in Abhängigkeit zur Stringerhöhe  $b_s$ . In der linearen Stabilitätsanalyse ist die kritische Last die Beullast. In der nichtlinearen Stabilitätsanalyse sind die kritischen Lasten durch Verschiebungsschwellenwerte und Festigkeitsgrenzen definiert. Die Paneelausprägung kann Liebisch und Freund [LF14] entnommen werden.

## *7. Perspektiven der Stabilitätsanalyse mit Multilevel-Metamodellen*

liegt jedoch ebenso einem Modellfehler. Daher sind beispielsweise Modellfehlerschätzer und die Beziehungen zwischen allen Modellen unterschiedlicher Genauigkeitsstufen interessant, um Entscheidungen auf Basis verschiedenartiger Informationen treffen zu können. Strategien zur Handhabung dieser Multilevel-Daten sowie die Entscheidungsfindung anhand dieser Daten ist eine offene Forschungsfrage.

# A. Lastermittlung in BEOS

In dieser Arbeit werden die Größen  $N$  und  $\phi$  verwendet, welche in Abhängigkeit der Steifigkeiten in die Membranlasten  $N_x^H$  und  $N_{xy}^H$ , sowie  $N_x^{H+F}$  und  $N_{xy}^{H+F}$  der Schalenelemente überführt werden müssen (siehe Abbildung 3.12). Ausgehend von

$$N \cdot \cos \phi = N_x \quad (\text{A.1})$$

$$N \cdot \sin \phi = N_{xy} \quad (\text{A.2})$$

ergibt sich

$$N \cdot \cos \phi = N_x^H + N_x^F + N_x^S \quad (\text{A.3})$$

$$N \cdot \sin \phi = N_{xy}^H + N_{xy}^F \quad (\text{A.4})$$

für die Lastanteile, wobei  $N_x^S$  die Last des Stringersteges beschreibt.

Das Steifigkeitsverhältnis zwischen Haut ohne Stringerfuß und Haut inklusive Stringerfuß lässt sich über die Faktoren  $f_{11}$  und  $f_{33}$

$$f_{11} = \frac{A_{11}^{(H+F)} - \frac{A_{12}^{(H+F)^2}}{A_{11}^{(H+F)}}}{A_{11}^H - \frac{A_{12}^{(H)^2}}{A_{11}^H}} \quad (\text{A.5})$$

$$f_{33} = \frac{A_{33}^{(H+F)}}{A_{33}^H} \quad (\text{A.6})$$

aus den jeweiligen A-Anteilen der ABD-Matrix bei einem jeweils einachsigen Belastungszustand ermitteln. Somit sind die Haut- und Fußlasten für die Hautabschnitte mit Stringerfüßen

## A. Lastermittlung in BEOS

$$N_x^{H+F} = f_{11} \cdot N_x^H \quad (\text{A.7})$$

$$N_{xy}^{H+F} = f_{33} \cdot N_{xy}^H \quad (\text{A.8})$$

Die Kraft des Stringersteges bezüglich einer axialen Belastung ist über die Kontinuitätsbedingung an den Stringerkoordinaten  $\varepsilon_x^{(Haut)}|_{y=y_{Str}} = \varepsilon_x^{(Steg)}$  über die Nachgiebigkeit der Haut  $\bar{A}_{11}^{(Haut)}$  mit der Hautlast

$$F_x^S = EA_{Steg} \cdot \varepsilon_x^S \quad (\text{A.9})$$

$$= EA_{Steg} \cdot \bar{A}_{11}^H N_x^H \quad (\text{A.10})$$

ermittelbar.

Nach Einsetzen von A.7, A.8 und A.10 in A.3 und A.4 ergibt sich

$$\begin{aligned} N \cdot \cos \phi &= ((b - b_F) \cdot N_x^H + b_F \cdot f_{11} \cdot N_x^H + J_{Steg} \cdot \bar{A}_{11}^H N_x^H) / b \\ &= ((b + b_F(f_{11} - 1) + J_{Steg} \cdot \bar{A}_{11}^H) \cdot N_x^H) / b \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} N \cdot \sin \phi &= ((b - b_F) \cdot N_{xy}^H + b_F \cdot f_{33} \cdot N_{xy}^H) / b \\ &= ((b + b_F(f_{33} - 1)) \cdot N_{xy}^H) / b \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

als gesamter Kraftfluss des Paneels in Abhängigkeit des Hautkraftflusses.

Im Grundzustand kann das Paneel durch die festen Membranlasten  $N_{x, fest}^H$  und  $N_{xy, fest}^H$  belastet werden. In der hier verwendeten Modellierung haben die festen Vorlasten  $N_{x, fest}^H$  und  $N_{xy, fest}^H$  und die variablen Lasten  $N_{x, var}^H$  und  $N_{xy, var}^H$  das gleiche Verhältnis.

$$\frac{N_x^H}{N_{xy}^H} = \frac{N_{x, fest}^H}{N_{xy, fest}^H}. \quad (\text{A.13})$$

Die kritische Last ergibt sich nach Lösung des Eigenwertproblems nach

$$\begin{pmatrix} N_{x, crit}^H \\ N_{xy, crit}^H \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} N_x^H \\ N_{xy}^H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{x, fest}^H \\ N_{xy, fest}^H \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$



## B. Stützpunkte zur Balkenanalyse

$\hat{l}$	$\hat{h}$	$u^t(X^t)$
0.25	1.00	1.93E-07
1.00	0.00	7.35E-04
0.50	0.25	1.49E-05
0.00	0.50	2.19E-08
0.75	0.75	5.31E-06

Tabelle B.1.: Stützpunkte des Zielmodells anhand der Zielstützstellen  $X^t$  zur Verformungsanalyse des Balkens in Kapitel 5;  $u_t(X^t)$  in  $[m]$

# B. Stützpunkte zur Balkenanalyse

$\hat{l}$	$\hat{h}$	$u^b(X^b)$	$\hat{l}$	$\hat{h}$	$u^b(X^b)$	$\hat{l}$	$\hat{h}$	$u^b(X^b)$
0.29	0.11	1.10E-05	0.42	0.19	1.42E-05	0.40	0.26	8.13E-06
0.09	0.13	1.08E-06	0.52	0.77	1.94E-06	0.20	0.47	6.24E-07
0.25	0.01	2.11E-05	0.80	0.14	1.06E-04	0.46	0.39	5.78E-06
0.41	0.83	9.09E-07	0.49	0.17	2.39E-05	0.69	0.99	2.23E-06
0.36	0.71	9.50E-07	0.60	0.54	6.01E-06	0.82	0.79	5.98E-06
0.33	0.92	4.29E-07	0.02	0.49	3.68E-08	0.99	0.69	1.35E-05
0.00	0.43	2.75E-08	0.77	0.53	1.20E-05	0.53	0.23	1.95E-05
0.89	0.96	4.73E-06	0.06	0.95	2.05E-08	0.88	0.65	1.11E-05
0.85	0.93	4.50E-06	0.90	0.63	1.27E-05	0.15	0.02	6.85E-06
0.81	0.33	3.33E-05	0.39	0.03	4.63E-05	0.31	0.28	4.00E-06
1.00	0.50	2.72E-05	0.48	0.10	3.93E-05	0.04	0.91	1.52E-08
0.95	0.85	7.51E-06	0.30	0.35	2.56E-06	0.12	0.97	5.06E-08
0.76	0.12	1.08E-04	0.16	0.78	1.39E-07	0.72	0.64	6.75E-06
0.23	0.29	1.97E-06	0.84	0.20	7.87E-05	0.43	0.06	4.31E-05
0.92	0.36	4.04E-05	0.32	0.61	1.01E-06	0.10	0.24	5.87E-07
0.97	0.40	3.85E-05	0.24	0.00	2.17E-05	0.27	0.31	2.49E-06
0.18	0.05	7.02E-06	0.17	0.67	2.18E-07	0.65	1.00	1.86E-06
0.94	0.16	1.41E-04	0.63	0.60	5.47E-06	0.62	0.55	6.29E-06
0.21	0.32	1.39E-06	0.37	0.74	9.24E-07	0.83	0.86	5.08E-06
0.34	0.68	9.14E-07	0.19	0.98	1.13E-07	0.45	0.27	1.02E-05
0.56	0.52	5.44E-06	0.66	0.41	1.32E-05	0.11	0.87	5.69E-08
0.35	0.81	6.60E-07	0.13	0.48	2.70E-07	0.44	0.34	6.62E-06
0.87	0.59	1.33E-05	0.47	0.42	5.32E-06	0.79	0.22	5.86E-05
0.68	0.51	9.33E-06	0.74	0.90	3.36E-06	0.03	0.30	1.14E-07
0.57	0.82	2.12E-06	0.93	0.18	1.19E-04	0.05	0.89	1.97E-08
0.14	0.56	2.25E-07	0.28	0.15	7.40E-06	0.26	0.57	7.30E-07
0.67	0.94	2.34E-06	0.61	0.09	7.86E-05	0.07	0.04	1.74E-06
0.64	0.08	9.73E-05	0.58	0.45	7.91E-06	0.22	0.37	1.19E-06
0.55	0.75	2.37E-06	0.75	0.76	5.15E-06	0.70	0.70	5.16E-06
0.38	0.62	1.45E-06	0.54	0.21	2.32E-05	0.86	0.66	1.01E-05
0.96	0.88	7.13E-06	0.73	0.73	5.24E-06	0.78	0.84	4.54E-06
0.59	0.46	7.92E-06	0.71	0.72	5.03E-06	0.01	0.58	2.01E-08
0.98	0.44	3.31E-05	0.08	0.07	1.54E-06	0.91	0.38	3.56E-05
0.51	0.25	1.57E-05	0.50	0.80	1.61E-06			

Tabelle B.2.: Stützpunkte des Basismodells anhand der Basisstützstellen  $X^b$  zur Verformungsanalyse des Balkens in Kapitel 5;  $u_b(X^b)$  in  $[m]$

## B. Stützpunkte zur Balkenanalyse

$\hat{l}$	$\hat{h}$	$u^b(X_{test})$	$u^t(X_{test})$	$\hat{l}$	$\hat{h}$	$u^b(X_{test})$	$u^t(X_{test})$	$\hat{l}$	$\hat{h}$	$u^b(X_{test})$	$u^t(X_{test})$
.39	.92	6.34e-07	6.39e-07	0.13	0.09	2.67e-06	2.68e-06	0.38	0.18	1.20e-05	1.20e-05
.61	.55	6.03e-06	6.04e-06	0.56	0.27	1.77e-05	1.77e-05	0.70	0.59	7.46e-06	7.47e-06
.21	.12	5.08e-06	5.09e-06	0.57	0.29	1.65e-05	1.65e-05	0.50	0.88	1.29e-06	1.30e-06
.92	.22	8.82e-05	8.83e-05	0.17	0.41	5.91e-07	5.95e-07	0.59	0.94	1.68e-06	1.69e-06
.25	.93	2.25e-07	2.28e-07	0.46	0.28	1.02e-05	1.02e-05	0.18	0.87	1.35e-07	1.38e-07
.90	.69	1.04e-05	1.04e-05	0.81	0.06	2.18e-04	2.18e-04	0.58	0.76	2.63e-06	2.64e-06
.84	.15	1.12e-04	1.12e-04	0.14	0.21	1.23e-06	1.23e-06	0.91	0.61	1.40e-05	1.40e-05
.95	.84	7.72e-06	7.73e-06	0.29	0.78	4.69e-07	4.73e-07	0.43	0.74	1.32e-06	1.33e-06
.69	.53	8.97e-06	8.98e-06	0.88	0.79	7.22e-06	7.23e-06	0.22	0.54	5.74e-07	5.78e-07
.79	.49	1.50e-05	1.50e-05	0.68	0.25	3.28e-05	3.28e-05	0.33	0.63	1.01e-06	1.01e-06
.89	.05	3.10e-04	3.10e-04	0.47	0.95	9.25e-07	9.30e-07	0.40	0.64	1.53e-06	1.54e-06
.71	.13	8.36e-05	8.36e-05	0.60	0.34	1.44e-05	1.44e-05	0.27	0.11	9.37e-06	9.38e-06
.08	.72	5.52e-08	5.72e-08	0.85	0.16	1.07e-04	1.07e-04	0.52	0.32	1.11e-05	1.11e-05
.66	.46	1.06e-05	1.06e-05	0.78	0.50	1.39e-05	1.40e-05	0.76	0.38	2.20e-05	2.20e-05
.83	.68	8.63e-06	8.64e-06	0.94	0.39	3.70e-05	3.71e-05	0.19	0.70	2.46e-07	2.49e-07
.44	.77	1.28e-06	1.29e-06	0.11	0.60	1.30e-07	1.33e-07	0.42	0.33	6.22e-06	6.23e-06
.93	.80	8.15e-06	8.16e-06	0.75	0.37	2.22e-05	2.23e-05	0.32	0.83	5.08e-07	5.12e-07
.16	.65	2.08e-07	2.11e-07	0.48	0.36	7.42e-06	7.43e-06	0.87	0.56	1.48e-05	1.48e-05
.20	.10	5.44e-06	5.45e-06	0.55	0.85	1.78e-06	1.79e-06	0.24	0.07	1.04e-05	1.04e-05
.80	.51	1.43e-05	1.43e-05	0.62	0.19	3.78e-05	3.78e-05	0.67	0.58	6.89e-06	6.90e-06
.86	.08	2.13e-04	2.13e-04	0.74	0.35	2.37e-05	2.37e-05	0.41	0.91	7.34e-07	7.38e-07
.65	.43	1.16e-05	1.16e-05	0.45	0.24	1.22e-05	1.22e-05	0.53	0.67	2.77e-06	2.78e-06
.51	.89	1.32e-06	1.33e-06	0.15	0.62	2.05e-07	2.08e-07	0.10	0.75	6.91e-08	7.12e-08
.23	.66	4.12e-07	4.16e-07	0.26	0.86	2.94e-07	2.98e-07				
.64	.73	3.72e-06	3.72e-06	0.77	0.81	4.77e-06	4.78e-06				
.82	.30	4.04e-05	4.04e-05	0.37	0.44	2.73e-06	2.74e-06				
.73	.20	5.42e-05	5.42e-05	0.72	0.14	8.02e-05	8.03e-05				
.07	.31	2.42e-07	2.45e-07	0.63	0.57	6.09e-06	6.10e-06				
.35	.52	1.72e-06	1.73e-06	0.31	0.17	8.03e-06	8.04e-06				
.12	.42	3.06e-07	3.09e-07	0.34	0.47	1.97e-06	1.98e-06				
.05	.45	8.49e-08	8.73e-08	0.09	0.40	2.16e-07	2.19e-07				
.28	.26	3.57e-06	3.58e-06	0.36	0.48	2.16e-06	2.17e-06				
.06	.90	2.32e-08	2.48e-08	0.30	0.23	5.00e-06	5.00e-06				
.49	.71	2.00e-06	2.01e-06	0.54	0.82	1.85e-06	1.85e-06				

Tabelle B.3.: Stützpunkte des Basis- und Zielmodells anhand der Teststellen  $X_{test}$  zur Verformungsanalyse des Balkens in Kapitel 5;  $u^b(X_{test})$  und  $u^t(X_{test})$  in [m]

# Literaturverzeichnis

- [AAR96] Altenbach, Holm, Johannes Altenbach und Rolands Rikards: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke: Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Wiley-VCH, Stuttgart, 1. Auflage, Juli 1996.
- [AB10] Arbocz, Johann und Chiara Bisagni: *Space engineering - Buckling of structures ECSS-E-HB-32-24A*. ECSS, 2010.
- [AH93] Andres, Terry H und Wayne C Hajas: *Using iterated fractional factorial design to screen parameters in sensitivity analysis of a probabilistic risk assessment model*. Mathematical methods and supercomputing in nuclear applications. Proceedings. Vol. 2, 1993.
- [Ame06] AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS (Herausgeber): *ASME V&V 10-2006: Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*. ASME, 2006.
- [Bü06] Bürmann, P: *A semi-analytical model for the post-buckling analysis of stringer- and frame-stiffened cylindrical panels under combined loading*. Dissertation, 2006.
- [BAA15] Bacarreza, Omar, Ferri Aliabadi und Alfonso Apicella: *Robust design and optimization of composite stiffened panels in post-buckling*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 51(2):409–422, Februar 2015.
- [Bat01] Bathe, Klaus-Jürgen: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, 2., vollst. neu bearb. u. erw. Aufl. 2002 Auflage, Dezember 2001.
- [BBG<sup>+</sup>11] Bettebghor, Dimitri, Nathalie Bartoli, Stéphane Grihon, Joseph Morlier und Manuel Samuelides: *Surrogate modeling approximation using a mixture of experts based on EM joint estimation*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 43(2):243–259, Februar 2011.
- [BD87] Box, George EP und Norman R Draper: *Empirical model-building and response surfaces*. John Wiley & Sons, 1987.

- [Bee13] Beerhorst, Matthias: *Entwicklung von hocheffizienten Berechnungsmethoden zur Beschreibung des Beul- und Nachbeulverhaltens von versteiften und unversteiften Flächentragwerken aus Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Technische Universität Berlin, September 2013.
- [BFI07] Busby, Daniel, Chris L. Farmer und Armin Iske: *Hierarchical nonlinear approximation for experimental design and statistical data fitting*. SIAM Journal on Scientific Computing, 29(1):49–69, 2007.
- [BG02] Beachkofski, Brian und Ramana Grandhi: *Improved Distributed Hypercube Sampling*. In: *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, April 2002.
- [BH93] Barthelemy, Jean-François und Raphael Haftka: *Approximation concepts for optimum structural design—a review*. Structural optimization, 5(3):129–144, 1993.
- [BKD90] Beitz, Wolfgang, Karl-Heinz Küttner und Heinrich Dubbel: *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau 17.Auflage*. Springer, Oktober 1990.
- [BLNZ95] Byrd, Richard, Peihuang Lu, Jorge Nocedal und Ciyou Zhu: *A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization*. SIAM Journal on Scientific Computing, 16(5):1190–1208, September 1995.
- [BO04] Babuska, Ivo und J. Tinsley Oden: *Verification and validation in computational engineering and science: basic concepts*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 193(36-38):4057–4066, 2004.
- [Bro70] Broyden, Charles: *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations*. IMA Journal of Applied Mathematics, 6(1):76–90, 1970.
- [BRTS06] Bürmann, Philipp, Raimund Rolfes, Jan Tessmer und Martin Schagerl: *A semi-analytical model for local post-buckling analysis of stringer- and frame-stiffened cylindrical panels*. Thin-Walled Structures, 44(1):102–114, Januar 2006.
- [BSA04] Byklum, Eirik, Eivind Steen und Jørgen Amdahl: *A semi-analytical model for global buckling and postbuckling analysis of stiffened panels*. Thin-Walled Structures, 42(5):701–717, Mai 2004.
- [Bus81] Bushnell, David: *Buckling of shells-pitfall for designers*. AIAA journal, 19(9):1183–1226, 1981.
- [CAK<sup>+</sup>04] Choi, Seongim, Juan J. Alonso, Ilan M. Kroo, Mathias Wintzer, Seongim Choi, Juan J. Alonso, Ilan M. Kroo und Mathias Wintzer: *Multi-Fidelity Design Op-*

- timization of Low-Boom Supersonic Business Multi-Fidelity Design Optimization of Low-Boom Supersonic Business Jets*. Technischer Bericht, Proceedings of the 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, No. AIAA 2004-4371 in AIAA Paper, 2004. 14 of 15 American Institute of Aeronautics and Astronautics 8 Alexandrov, 2004.
- [CAK05] Choi, Seongim, Juan Alonso und Ilan Kroo: *Multi-Fidelity Design Optimization Studies for Supersonic Jets Using Surrogate Management Frame Method*. In: AIAA. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Juni 2005.
- [CBS16] Courier, Nicolas, Pierre-Alain Boucard und Bruno Soulier: *Variable-fidelity modeling of structural analysis of assemblies*. Journal of Global Optimization, 64(3):577–613, März 2016.
- [CCS07] Campolongo, Francesca, Jessica Cariboni und Andrea Saltelli: *An effective screening design for sensitivity analysis of large models*. Environmental modelling & software, 22(10):1509–1518, 2007.
- [CGS05] Clarke, Stella M, Jan H Griebisch und Timothy W Simpson: *Analysis of support vector regression for approximation of complex engineering analyses*. Journal of mechanical design, 127(6):1077–1087, 2005.
- [CHGK93] Chang, Kwan, Raphael Haftka, Gary Giles und Pi-Jen Kao: *Sensitivity-based scaling for approximating structural response*. Journal of Aircraft, 30(2):283–288, 1993.
- [CM98] Cherkassky, Vladimir und Filip Mulier: *Learning from Data: Concepts, Theory, and Methods*. Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control Series, 1998.
- [Com98] COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS COMMITTEE (Herausgeber): *Guide: Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations (AIAA G-077-1998(2002))*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington, DC, Januar 1998.
- [Cre93] Cressie, Noel AC: *Statistics for spatial data*. Wiley Online Library, 1993.
- [Das14] DASSAULT SYSTÈMES: *Abaqus 6.14-1 Documentation*, 2014.
- [DF01] Davies, Adrian und Phil Fennessy: *Digital imaging for photographers*. Taylor & Francis, 2001.
- [DF12] Duvigneau, Fabian und Sebastian Freund: *Auslegung und Multi-fidelity Optimierung von spant- und stringerversteiften Schalen aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK)*. Berichtsreihe, OvGU Magdeburg, Oktober 2012.

- [DFG99] Du, Qiang, Vance Faber und Max Gunzburger: *Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms*. SIAM Review, 41(4):637–676, Januar 1999.
- [DLR86] Dyn, Nira, David Levin und Samuel Rippa: *Numerical procedures for surface fitting of scattered data by radial functions*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 7(2):639–659, 1986.
- [DR08] Dahmen, Wolfgang und Arnold Reusken: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2 Auflage, 2008.
- [DRW<sup>+</sup>04] Degenhardt, Richard, Klaus Rohwer, Werner Wagner, Jean-Pierre Delsemme und SA Samtech: *Postbuckling And Collapse Analysis Of CFRP Stringer Stiffened Panels—A Garteur Activity*. Thin-Walled Structures: Advances in Research, Design and Manufacturing Technology, Seite 121, 2004.
- [DS04] Diaconu, Cezar Gabriel und Hideki Sekine: *Layup Optimization for Buckling of Laminated Composite Shells with Restricted Layer Angles*. AIAA Journal, 42(10):2153–2163, Oktober 2004.
- [EE11] EUROPÄISCHE KOMMISSION und EUROPÄISCHE KOMMISSION (Herausgeber): *Flight-path 2050: Europe’s vision for aviation ; maintaining global leadership and serving society’s needs ; report of the High-Level Group on Aviation Research*. Policy / European Commission. Publ. Off. of the Europ. Union, Luxembourg, 2011. OCLC: 930887434.
- [EST15] ESTECO: *modeFrontier*, August 2015.
- [Eul44] Euler, Leonhard: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*. Seite 34, 1744.
- [Eur12] EUROPEAN AVIATION SAFETY AGENCY: *CS-25 Certification specifications and acceptable means of compliance for large aeroplanes*, 2012.
- [FHT01] Friedman, Jerome, Trevor Hastie und Robert Tibshirani: *The elements of statistical learning*, Band 1. Springer series in statistics New York, NY, USA:, 2001.
- [Fle70] Fletcher: *A new approach to variable metric algorithms*. The Computer Journal, 13(3):317–322, 1970.
- [Fri91] Friedman, Jerome H: *Multivariate adaptive regression splines*. The annals of statistics, Seiten 1–67, 1991.
- [FSK07] Forrester, Alexander, András Sóbester und Andy J. Keane: *Multi-fidelity optimization via surrogate modelling*. Proceedings of the Royal Society of London A:

- Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 463(2088):3251–3269, Dezember 2007.
- [FSK08] Forrester, Alexander, Andras Sobester und Andy J. Keane: *Engineering Design via Surrogate Modelling: A Practical Guide*. John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England ; Hoboken, NJ, 1. Auflage Auflage, Juli 2008.
- [GAB<sup>+</sup>12] Grihon, Stephane, Stephane Alestra, Dimitri Bettebghor, Evgeny Burnaev und Pavel Viktorovich Prikhodko: *Comparison of different techniques for surrogate modeling of stability constraints for composite structures*. In: *Proceedings of 1st International Conference on Composite Dynamics, Archanon, France, 2012*.
- [Gei72] Geier, Bodo: *Die Anwendung des Verfahrens von Rayleigh-Ritz mit maschenweiser Interpolation auf die Berechnung der Beullasten flacher Sandwichschalen*. Technischer Bericht, Institut für Flugzeugbau, Braunschweig, 1972.
- [Gei91] Geier, Bodo: *Buckling and postbuckling behaviour of composite panels*. GARTEUR 062, 1991.
- [GFW11] Geier, Martin, Sebastian Freund und Dirk Wilckens: *Auslegung und Optimierung von spant- und stringerversteiften Schalen aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff*. Technischer Bericht, DLR, Braunschweig, 2011.
- [GH17] Ghasemi, Ahmad Reza und Mohammad Hadi Hajmohammad: *Multi-objective optimization of laminated composite shells for minimum mass/cost and maximum buckling pressure with failure criteria under external hydrostatic pressure*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 55(3):1051–1062, März 2017.
- [Gol70] Goldfarb, Donald: *A family of variable-metric methods derived by variational means*. Mathematics of Computation, 24(109):23–26, 1970.
- [GR89] Geier, Bodo und Klaus Rohwer: *On the analysis of the buckling behaviour of laminated composite plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 27(2):403–427, September 1989.
- [GSR04] Gano, Shawn, Brian Sanders und John Renaud: *Variable Fidelity Optimization Using a Kriging Based Scaling Function*. In: AIAA. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 2004.
- [Hen13] Henze, Norbert: *Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 10. Auflage Auflage, September 2013.
- [Her88] Herakovich, Carl T.: *Mechanics of Fibrous Composites*. Wiley, 1988.
- [Her15] Herrmann, Ralf: *MAAXIMUS-Simulation-based Development & Validation for*



- a Future Composite Fuselage*. In: EASN, Manchester, UK, 2015.
- [HG12] Han, Zhong-Hua und Stefan Görtz: *Hierarchical Kriging Model for Variable-Fidelity Surrogate Modeling*. AIAA Journal, 50(9):1885–1896, 2012.
- [Hin07] Hinton, Geoffrey E.: *Learning multiple layers of representation*. Trends in Cognitive Sciences, 11(10):428–434, Oktober 2007.
- [HK70] Hoerl, Arthur E und Robert W Kennard: *Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems*. Technometrics, 12(1):55–67, 1970.
- [Hol03] Hollatz, Horst: *Mathematik-Vorlesungen für Informatiker*. Shaker, 2003.
- [HSB09] HSB: *Handbuch Strukturberechnung*. Technischer Bericht, IASB mbh, Einsteinstr. 20 85521 Ottobrunn, 2009.
- [HZG12] Han, Zhonghua, Ralf Zimmerman und Stefan Görtz: *Alternative Cokriging Method for Variable-Fidelity Surrogate Modeling*. AIAA Journal, 50(5):1205–1210, 2012.
- [JDG02] Ju, Lili, Qiang Du und Max Gunzburger: *Probabilistic methods for centroidal Voronoi tessellations and their parallel implementations*. Parallel Computing, 28(10):1477–1500, 2002.
- [JMY90] Johnson, Mark E, Leslie M Moore und Donald Ylvisaker: *Minimax and maximin distance designs*. Journal of statistical planning and inference, 26(2):131–148, 1990.
- [Jon98] Jones, Robert M.: *Mechanics Of Composite Materials*. Taylor & Francis Inc, Philadelphia, PA, 2 New edition Auflage, November 1998.
- [JSW98] Jones, Donald R., Matthias Schonlau und William James Welch: *Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions*. Journal of Global Optimization, 13(4):455–492, Dezember 1998.
- [Kal06] Kalniņš, Kaspars: *Response Surface Method for Optimal Design of Composite Stiffened Panels*. Dissertation, Riga Technical University, Riga, 2006.
- [Kle75] Kleijnen, Jack PC: *A comment on Blanning’s “Metamodel for sensitivity analysis: the regression metamodel in simulation”*. Interfaces, 5(3):21–23, 1975.
- [Kli10] Kling, Alexander: *Contributions to improved stability analysis for design of thin-walled composite structures*. PhD Thesis, DLR, Bibliotheks-und Informationswesen, 2010.
- [KO00] Kennedy, Marc C und Anthony O’Hagan: *Predicting the output from a complex computer code when fast approximations are available*. Biometrika, 87(1):1–13,

- 2000.
- [KR10] Kalnins, Kaspars und Rolands Rikards: *Metamodeling methodology for post-buckling simulation of damaged composite stiffened structures with physical validation*. International Journal of Structural Stability and Dynamics (Sonderband), 10(2010-10):705–717, 2010.
  - [Kre05] Krengel, Ulrich: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Band 8. Springer, 2005.
  - [Kri51] Krige, Daniel: *A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand*. Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa, 52(6):119–139, Dezember 1951.
  - [KSH12] Krizhevsky, Alex, Ilya Sutskever und Geoffrey E. Hinton: *ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks*. In: Pereira, F., C. J. C. Burges, L. Bottou und K. Q. Weinberger (Herausgeber): *Advances in Neural Information Processing Systems 25*, Seiten 1097–1105. Curran Associates, Inc., 2012.
  - [Lem09] Lemieux, Christiane: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer, 2009.
  - [LF14] Liebisch, Martin und Sebastian Freund: *Entwicklung von Metamodellen für ausgewählte Auslegungskriterien von orthotrop versteiften Schalen aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK)*. Diplomarbeit, TU Braunschweig, Braunschweig, 2014.
  - [LNS02a] Lophaven, Søren Nymand, Hans Bruun Nielsen und Jacob Søndergaard: *Aspects of the matlab toolbox DACE*. ResearchGate, Januar 2002.
  - [LNS02b] Lophaven, Søren Nymand, Hans Bruun Nielsen und Jacob Søndergaard: *DACE - A Matlab Kriging Toolbox, Version 2.0*. Report, Technical University of Denmark, 2002.
  - [Lov88] Love, Augustus Edward Hough: *The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, 179:491–546, 1888.
  - [LSR06] Linde, Peter, A. Schulz und Wilhelm Rust: *Influence of modelling and solution methods on the FE-simulation of the post-buckling behaviour of stiffened aircraft fuselage panels*. Composite Structures, 73(2):229–236, Mai 2006.
  - [Mar37] Marguerre, Karl: *Die mittragende Breite der gedrückten Platte*. Luftfahrtforschung, 14(3):121–128, 1937.
  - [Mat63] Matheron, Georges: *Principles of geostatistics*. Economic geology, 58(8):1246–

1266, 1963.

- [MBC79] McKay, Michael D., Richard J. Beckman und William J. Conover: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics, 21(2):239–245, 1979.
- [Mc10] Merkel, Markus und Andreas Öchsner: *Eindimensionale Finite Elemente*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [Mit11] Mittelstedt, Christian: *Buckling and Postbuckling of Thin-Walled Stiffened Composite Panels - Efficient Analysis Methods for Lightweight Engineering -*. Habilitation, Darmstadt, März 2011.
- [MM95] Morris, Max D. und Toby J. Mitchell: *Exploratory designs for computational experiments*. Journal of statistical planning and inference, 43(3):381–402, 1995.
- [Mor91] Morris, Max D.: *Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments*. Technometrics, 33(2):161–174, Mai 1991.
- [MPFGZ01] Meyer-Piening, Hans Reinhard, Mehdi Farshad, Bodo Geier und Rolf H. Zimmermann: *Buckling loads of CFRP composite cylinders under combined axial and torsion loading – experiments and computations*. Composite Structures, 53(4):427–435, September 2001.
- [MS05] Martin, Jay D. und Timothy W. Simpson: *Use of Kriging Models to Approximate Deterministic Computer Models*. AIAA Journal, 43(4):853–863, April 2005.
- [Niu10] Niu, Michael C.: *Composite Airframe Structures*. Hong Kong Conmilit Press Ltd., Hong Kong, Third edition Auflage, Dezember 2010.
- [Noe15] NOESIS: *Optimus Design Optimization Software*, August 2015.
- [OTH04] Oberkampf, William L., Timothy G. Trucano und Charles Hirsch: *Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics*. Applied Mechanics Reviews, 57(5):345, 2004.
- [Pfl13] Pflüger, Alf: *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer-Verlag, 2013.
- [PSL06] Price, Kenneth, Rainer M Storn und Jouni A Lampinen: *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [PWG18] Peherstorfer, Benjamin, Karen Willcox und Max Gunzburger: *Survey of Multifidelity Methods in Uncertainty Propagation, Inference, and Optimization*. SIAM Review, 60(3):550–591, Januar 2018.
- [QHS<sup>+</sup>05] Queipo, Nestor, Raphael Haftka, Wei Shyy, Tushar Goel, Rajkumar Vaidyana-

- than und Kevin Tucker: *Surrogate-based analysis and optimization*. Progress in Aerospace Sciences, 41(1):1–28, Januar 2005.
- [Red04] Reddy, Junuthula N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition*. CRC Press, Juni 2004.
- [RH04] Refsgaard, Jens Christian und Hans Jørgen Henriksen: *Modelling guidelines—terminology and guiding principles*. Advances in Water Resources, 27(1):71–82, Januar 2004.
- [RHW86] Rumelhart, David E., Geoffrey E. Hinton und Ronald J. Williams: *Learning representations by back-propagating errors*. Nature, 323:533, Oktober 1986.
- [Roh76] Rohwer, Klaus: *Buckling of discretely stiffened shells by meshwise Rayleigh-Ritz-Method*. Technischer Bericht, California Institute of Technology, Pasadena, 1976.
- [RS12] Rosenbaum, Benjamin und Volker Schulz: *Comparing sampling strategies for aerodynamic Kriging surrogate models*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 92(11-12):852–868, November 2012.
- [RW06] Rasmussen, Carl Edward und Christopher K. I. Williams: *Gaussian processes for machine learning*. Adaptive computation and machine learning. MIT Press, Cambridge, Mass, 2006. OCLC: ocm61285753.
- [SAW97] Singer, Josef, Johann Arbocz und Tanchum Weller: *Buckling Experiments, Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures, Volume 1, Basic Concepts, Columns, Beams and Plates*. Wiley, Chichester ; New York, 1. Auflage, Dezember 1997.
- [SAW02] Singer, Josef, Johann Arbocz und Tanchum Weller: *Buckling Experiments, Shells, Built-up Structures, Composites and Additional Topics*. Wiley, 1. Auflage, 2002.
- [Sch79] Schlesinger, Stewart: *Terminology for model credibility*. Simulation, 32(3):103–104, 1979.
- [Sch08] Schillo, Conny: *FEMMAS contribution Buckling of composite panels Deliverable BEOS 5.0 Manual*. Berichtsreihe IB 131-2008/15, DLR, Braunschweig, Februar 2008.
- [SF13] Sauerbrei, Anna und Sebastian Freund: *Erstellung und Genauigkeitsbewertung von Variable-Fidelity-Metamodellen zur Ermittlung von Beullasten orthotrop versteifter Flugzeugrumpfpaneele*. Berichtsreihe IB 131-2013/84, DLR, Braun-

- schweig, November 2013.
- [SGB07] Saka, Yuki, Max Gunzburger und John Burkardt: *Latinized, improved LHS, and CVT point sets in hypercubes*. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 4(3-4):729–743, 2007.
  - [Sha70] Shanno, David Francis: *Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization*. Mathematics of Computation, 24(111):647–656, 1970.
  - [Sir87] Sirovich, Lawrence: *Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures*. Quarterly of applied mathematics, 45(3):561–571, 1987.
  - [Sob93] Sobol, Ilya M: *Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models*. Mathematical modelling and computational experiments, 1(4):407–414, 1993.
  - [SRA<sup>+</sup>08] Saltelli, Andrea, Marco Ratto, Terry Andres, Francesca Campolongo, Jessica Cariboni, Debora Gatelli, Michaela Saisana und Stefano Tarantola: *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. John Wiley & Sons, Chichester, England ; Hoboken, NJ, 1 Auflage, Januar 2008.
  - [SW87] Shewry, M. C. und Henry P. Wynn: *Maximum entropy sampling*. Journal of Applied Statistics, 14(2):165–170, Januar 1987.
  - [SWMW89] Sacks, Jerome, William J. Welch, Toby J. Mitchell und Henry P. Wynn: *Design and Analysis of Computer Experiments*. Statistical Science, 4(4):409–423, November 1989.
  - [TA77] Tikhonov, Andreï Nikolaevich und Vasilii Iakovlevich Arsenin: *Solutions of ill-posed problems*. Solutions of ill-posed problems, VH Winston, 1977.
  - [TG70] Timoshenko, Stepan P. und James N. Goodier: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Education, New York, 3rd edition Auflage, März 1970.
  - [TGL05] Tang, Chun, Ken Gee und Scott Lawrence: *Generation of Aerodynamic Data using a Design Of Experiment and Data Fusion Approach*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Januar 2005.
  - [TH81] Tsai, Stephen W. und Hong Thomas Hahn: *Introduction to composite materials*. Lancaster, Pennsylvania, Technomic, 453, 1981.
  - [Tim21] Timoshenko, Stepan P.: *LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 41(245):744–746, 1921.
  - [Toa15] Toal, David J.: *Some considerations regarding the use of multi-fidelity Kriging*

- in the construction of surrogate models. Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(6):1223–1245, Juni 2015.
- [Tsa92] Tsai, Stephen W.: *Theory of composites design*. Think composites Dayton, OH, 1992.
- [TWZW18] Tian, Kuo, Bo Wang, Yan Zhou und Anthony M. Waas: *Proper-Orthogonal-Decomposition-Based Buckling Analysis and Optimization of Hybrid Fiber Composite Shells*. AIAA Journal, 56(5):1723–1730, Mai 2018.
- [VDI06] VDI: *Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund - Berechnungen | VDI 2014 Blatt 3*. Technischer Bericht, September 2006.
- [VHS98] Vitali, Roberto, Raphael Haftka und Bhavani Sankar: *Correction response surface approximations for stress intensity factors of a composite stiffened plate*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, April 1998.
- [VM10] Vankan, Jos und Robert Maas: *Surrogate modelling for efficient design optimisation of composite aircraft fuselage panels*. National Aerospace Laboratory NLR, 2010.
- [VSBT14] Viana, Felipe A. C., Timothy W. Simpson, Vladimir Balabanov und Vasilli Toropov: *Special Section on Multidisciplinary Design Optimization: Metamodeling in Multidisciplinary Design Optimization: How Far Have We Really Come?* AIAA Journal, 52(4):670–690, 2014.
- [Wie07] Wiedemann, Johannes: *Leichtbau: Elemente und Konstruktion*. Springer-Verlag, 2007.
- [Wil10] Wille, Tobias: *Simulationsbasierte Produktionsprozess-Optimierung am Beispiel der Infrarottrocknung*. Dissertation, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, September 2010.
- [Wil16] Wilckens, Dirk: *Test report of panels for low loaded areas of a barrel*. 2016.
- [Wil19] Wilckens, Dirk: *Beul- und Nachbeulverhalten von versteiften CFK-Schalen unter Druck- und Schubbelastung*. Dissertation, TU Braunschweig, Braunschweig, 2019.
- [Wol12a] Wolff, Caroline: *Bewertung unterschiedlicher nichtlinearer FEM-Modelle zur Berechnung des Beul- und Nachbeulverhaltens versteifter Faserverbundstrukturen*. Technischer Bericht, DLR, 2012.
- [Wol12b] Wolff, Caroline: *Numerische und experimentelle Untersuchungen des Stabilitätsverhaltens versteifter CFK-Schalen unter Schubbelastung*. Technischer Bericht, DLR, 2012.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [Wri01] Wriggers, Peter: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [Zim91] Zimmermann, Rolf H.: *Optimierung axial gedrückter CFK-Zylinderschalen*, Band 207 der Reihe *Konstruktionstechnik/Maschinenelemente*. VDI Verlag, Düsseldorf, Dezember 1991.
- [ZKK06] Zimmermann, Rolf H., Hermann Klein und Alexander Kling: *Buckling and post-buckling of stringer stiffened fibre composite curved panels – Tests and computations*. *Composite Structures*, 73(2):150–161, Mai 2006.
- [ZTT00] Zienkiewicz, Olgierd Cecil, Robert Leroy Taylor und Robert Leroy Taylor: *The finite element method: solid mechanics*, Band 2. Butterworth-Heinemann, 2000.